Capítulo 5

Cônicas e Quádricas

As cônicas são casos especiais de curvas e as quádricas, casos especiais de superfícies. Ambos podem ser apresentados parametricamente ou implicitamente. Vamos introduzir esses conceitos passo a passo, nas sessões a seguir.

5.1 Sobre parametrização de curvas no plano e no espaço

Vimos que uma aplicação $\begin{cases} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & f(t) \end{cases}$, é uma parametrização da reta que passa por $A = (x_0, y_0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$, ao expressar as coordenadas de $f(t) = (x(t), y(t))$ como uma função real da variável t, por meio das equações paramétricas $x(t) = x_0 + at$ e $y(t) = y_0 + bt$.

Analogamente, a aplicação $\begin{cases} g & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & gt) \end{cases}$, em que para cada t, $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é um vetor do espaço com $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$, $z(t) = z_0 + ct$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, é uma parametrização da reta r que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Em geral, uma <u>curva parametrizada</u> no plano $\mathbb{R}^2$ (respectivamente, no espaço $\mathbb{R}^3$) é uma <u>aplicação vetorial</u> $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (resp., $\mathbb{R}^3$), que associa a cada $t \in I$, um único vetor $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ (resp, $(x(t), y(t), z(t))$, em que cada coordenada é uma função real da variável t. $I \subset \mathbb{R}$ deve ser um intervalo ou uma reunião de intervalos.

t é chamado de <u>parâmetro</u> da curva α.

O conjunto imagem de uma curva parametrizada $\alpha(I) = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ (resp, $\alpha(I) = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in I\}$) é chamado traço de α.

As curvas parametrizadas aparecem naturalmente na trajetória de uma partícula em movimento, parametrizadas pelo tempo t. O traço da curva corresponde ao conjunto de pontos por onde a partícula passa. O intervalo I corresponde ao intervalo de tempo em que dura o movimento.

Mas os parâmetros podem representar outros elementos, como veremos a seguir.

5.1.1 Parametrização da circunferência em $\mathbb{R}^2$:

Lembremos que uma circunferência de raio r e de centro $C = (c_1, c_2)$ é constituído dos pontos $X = (x, y)$ que satisfaz a equação $|\overrightarrow{CX}| = R \iff |\overrightarrow{CX}|^2 = \mathbb{R}^2 \iff (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = R^2$. Se considerarmos θ como a medida em radianos do ângulo orientado positivo entre $\vec{\imath} = (1, 0)$ e o vetor $\overrightarrow{CX}$, vemos que as coordenadas de $\overrightarrow{CX}$ satisfazem: $x - c_1 = R\cos\theta$ e $y - c_2 = R\,\mathrm{sen}\,\theta$. Então temos uma parametrização da circunferência pelo ângulo:

$$\begin{array}{rcll} \alpha : & [0, 2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & \alpha(\theta) \quad = (x(\theta), y(\theta) = (c_1 + R\cos\theta, c_2 + R\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

Se considerarmos que uma partícula P está se movimentando sobre a circunferência, que no tempo $t = 0$ (segundos) está na posição $P(0) = \alpha(0)$ e que $\theta(t) = t$ (isto é, a variação do ângulo em radianos é igual à variação do tempo t), então a parametrização descreve a trajetória da partícula. Se considerarmos que a partícula estava já em movimento no momento em que se iniciou a contagem do tempo e sempre esteve, e que continua em movimento indefinidamente, podemos considerar parametrização com $I = \mathbb{R}$:

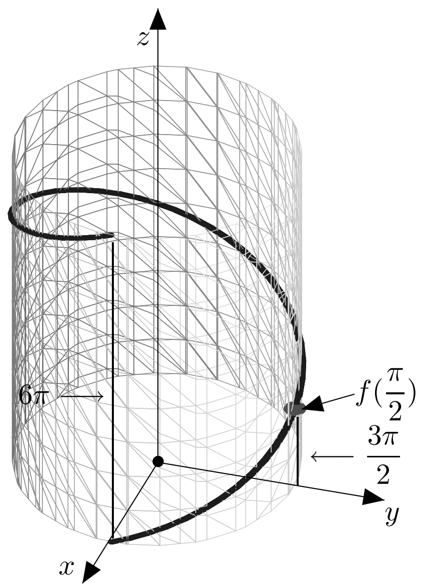
$$\begin{array}{rcll} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \alpha(t) \quad = (x(t), y(t) = (c_1 + R\cos t, c_2 + R\,\mathrm{sen}\, t) \end{array}$$

Mudando a variação do ângulo θ em relação ao tempo t, podemos obter outras parametrizações da circunferência. Ou seja, o mesmo traço pode estar associado a várias parametrizações.

Por exemplo, mostre como exercício que $\alpha(t) = (2 + \cos t, -1 + 3\,\mathrm{sen}\, t)$, $\beta(t) = (2 + 3\cos 2t, -1 + \mathrm{sen}\, 2t)$ e $\gamma(t) = (2 + 3\cos t, -1 - \mathrm{sen}\, t)$ são parametrizações da mesma circunferência. Qual é o centro? Qual é o raio? Descreva as diferenças entre as curvas (parametrizações). Interprete as parametrizações como trajetórias de uma partícula.

Parametrização de uma hélice

Considere a parametrização $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, 3t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Esta é uma curva no espaço em que $x(t) = 2\cos t$ e $y(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t$ satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 4$ que, no plano Oxy, é a equação da circunferência de raio 2 e centro na origem. Isto quer dizer que a projeção ortogonal do traço da curva sobre o plano Oxy está contido na circunferência. Então, o traço da curva está sobre o cilindro de base circular de raio 2 e eixo Oz.



Esta curva é chamada de hélice.
A ilustração mostra a curva com o parâmetro t no intervalo $I = [0, 2\pi]$, e portanto, é dado uma volta em torno do cilindro, com uma diferença em z de 2π, chamado passo da hélice. Observe que o eixo Oz nesta ilustração está achatado.
Alguns dos pontos:
$f(0) = (2, 0, 0)$,
$f(\frac{\pi}{2}) = (0, 2, \frac{3\pi}{2})$
$f(\frac{3\pi}{2}) = (0, -2, \frac{9\pi}{2})$
$f(2\pi) = (2, 0, 6\pi) = f(0) + (0, 0, 6\pi)$

Após dar uma volta completa, por exemplo, de $f(0)$ a $f(2\pi)$, a curva continua na forma $f(2n\pi + t) = f(t) + (0, 0, 2n\pi)$ para $t \in [0, 2\pi]$, e $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pode-se estender para $t < 0$ da mesma forma, tomando $n = -1, -2, -3, \ldots$.

Em geral, uma hélice cilíndrica tem parametrização padrão dada por $\alpha(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$, cujo passo é $2\pi b$. Estude o significado geométrico do sinal de b: o que ocorre com a hélice quando b é negativo?

Curva de Viviani

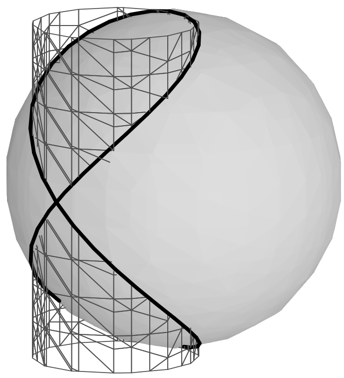
A curva parametrizda $\alpha(t) = 2(1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen}(\frac{t}{2}))$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$, é uma curva espacial, definida com parâmetro t no intervalo fechado dado. É uma curva famosa chamada curva de Viviani (descoberta em 1692).

As coordenadas $x(t) = 2(1 + \cos t)$ e $y(t) = 2\operatorname{sen} t)$ satisfazem a equação $(x-2)^2 + y^2 = 4$, indicando que o traço da curva se projeta ortogonalmente na circunferência de centro $(2, 0, 0)$ e raio 2 no plano Oxy, isto é,

o traço da curva está sobre o <u>cilindro</u> sobre a circunferência, paralelo ao eixo Oz.

Por outro lado, as coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ satisfazem a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ da esfera de centro na origem e raio 4.

Logo, o traço da curva de Viviani está contido na intersecção do cilindro com a esfera acima.



5.2 Curvas especiais: cônicas

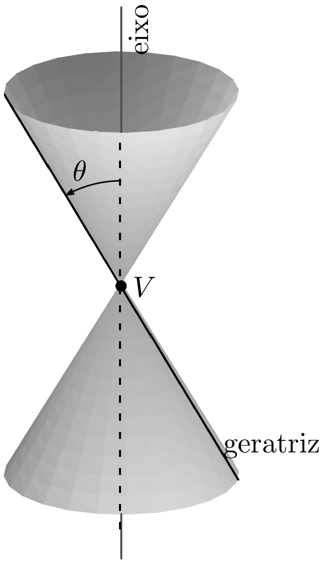
Vimos que a intersecção de dois planos resulta ser uma reta, e também vimos a curva de Viviani como intersecção de uma casca esférica e uma casca cilíndrica.

Assim, a intersecção de duas superfícies pode dar origem a curvas que podem possuir propriedades interessantes.

As cônicas são curvas planas que se originam da intersecção de cone circular por um plano. As diversas posições desse plano em relação ao cone dão origem a cônicas particulares muito importantes, como veremos a seguir.

5.2.1 Cônicas como secções planas do cone

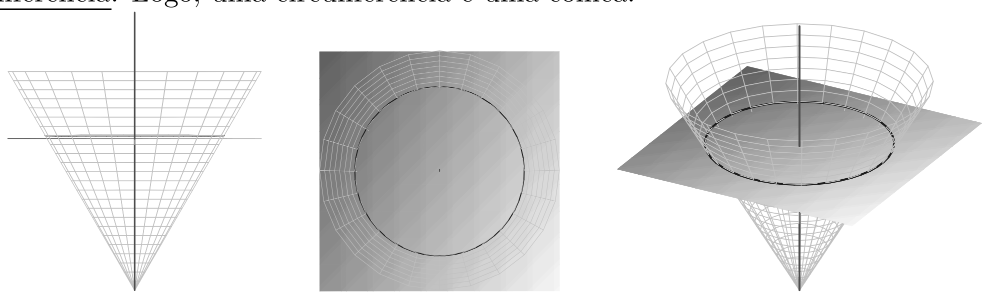
Considere um cone circular de vértice V e eixo r, cujas geratrizes formam ângulo θ com o eixo do cone.



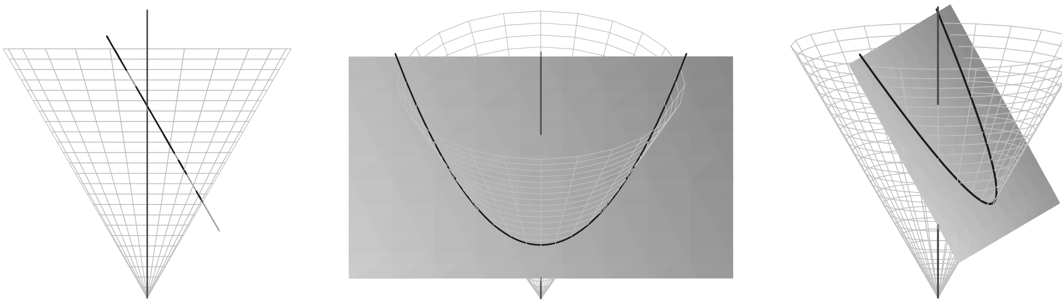
Lembremos que um cone circular pode ser obtido rotacionado uma reta (geratriz) em torno de uma outra reta (eixo de rotação), sendo que a geratriz e o eixo devem se interceptar num ponto (vértice do cone, V). Essa forma de obter o cone transforma o cone circular numa superfície de revolução.

Seja π o plano que secciona o cone. Temos então os seguintes casos para a intersecção do cone com o plano:

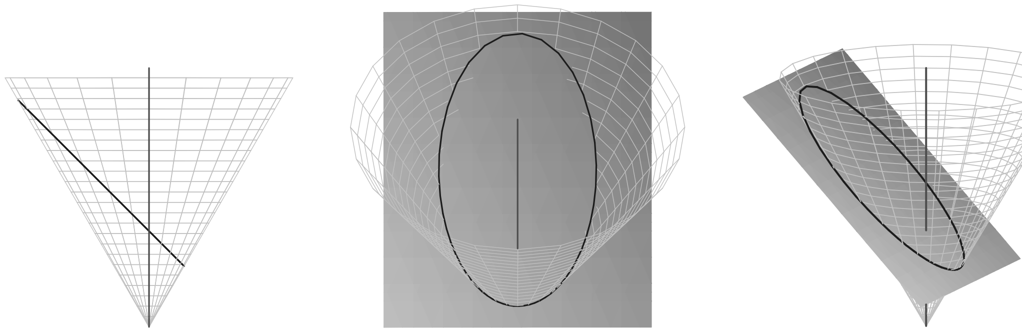
1. Se o plano π é perpendicular ao eixo do cone mas não passa pelo vértice V, então a secção é uma circunferência. Logo, uma circunferência é uma cônica.



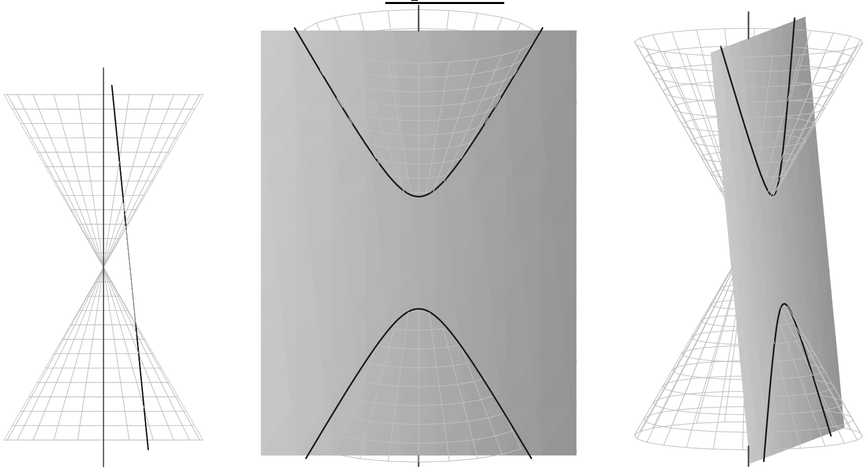
2. Se π é paralelo a uma geratriz do cone e não contém V, então a curva de intersecção é uma parábola.



3. Se o ângulo entre o plano π e o eixo r é maior que o ângulo θ entre o eixo e a geratriz, e π não passa pelo vértice, a intersecção é uma elipse. Um caso extremo é quando o ângulo é $\pi/2$, e a elipse se torna uma circunferência.



4. Se o ângulo entre o plano π e o eixo r é menor que o ângulo θ entre o eixo e a geratriz, e π não passa pelo vértice, então a intersecção contém pontos nos dois lados do cone em relação ao vértice e a curva resultante é chamada de hipérbole.



5. Quando o plano π passa pelo vértice V, e o ângulo entre π e o eixo é igual a θ, a intersecção

resulta em uma reta, que é uma reta geratriz.

6. Quando o plano π passa pelo vértice V, e o ângulo entre π e o eixo é menor que θ, a intersecção resulta em um par de retas concorrentes.

7. Quando o plano π passa pelo vértice V, e o ângulo entre π e o eixo é maior que θ, a intersecção resulta em um ponto, masi precisamente, o vértice V.

A cônicas obtidas como intersecção do cone por planos passando pelo vértice V são exemplos de cônicas tidas como degeneradas.

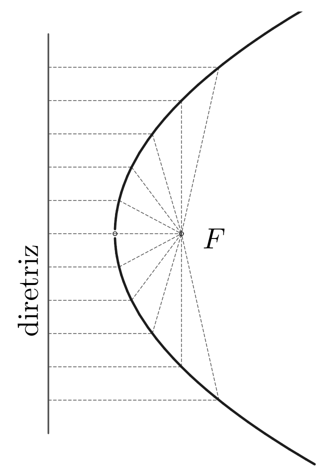
Existem mais dois outros casos de cônicas (degeneradas) que não comparecem na intersecção do cone circular com o plano, que são: para de retas paralelas e vazio. Estas cônicas podem ser obtidas como intersecção do cilindro com um plano. Na Geometria Projetiva, o cilindro é um cone, com vértice "no infinito".

Essas cônicas foram obtidas no espaço, mas como são curvas planas, isto é, contidas num plano, vamos passar ao estudo analítico das cônicas como curvas do plano, isto é, de $\mathbb{R}^2$.

5.3 Estudo da parábola

A parábola é uma curva plana caracterizada pela seguinte propriedade geométrica:

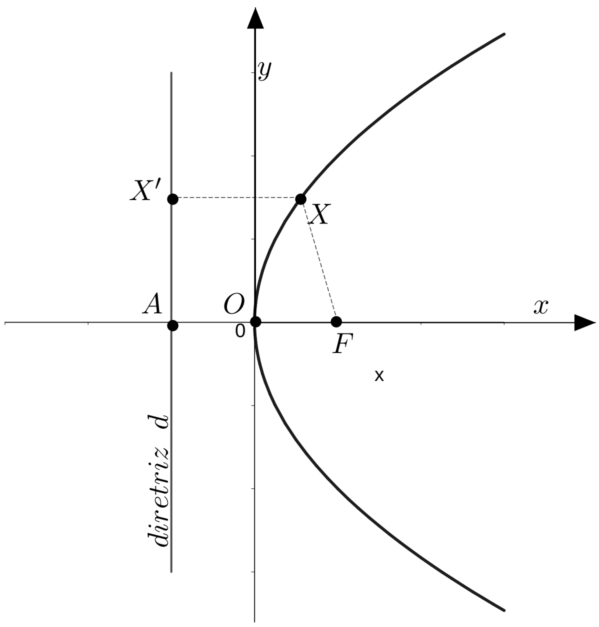
Os pontos de uma parábola são equidistantes de um ponto F e de uma reta d, que não contém F.



O ponto F é o foco e a reta d, a diretriz da parábola.

Essa propriedade pode ser demonstrada a partir de sua concepção como uma secção do cone mas não a faremos aqui. O interessados podem procurar as construções de Dandelin.

Para obtermos uma equação para a parábola (em $\mathbb{R}^2$), lançamos mão de um sistema de referencial cartesiano adequado no plano da parábola. Seja então um sistema $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$, escolhido como segue:



Ox = reta perpendicular a d e passando por F.
Oy = reta paralela a d e equidistante a d e a F.
Com isto, O é necessariamente o ponto médio do segmento FA perpendicular a d que une F ao ponto $A \in d$.
A orientação dos eixos é escolhida de modo que F fique no sentido positivo do eixo Ox e a orientação de Oy é aquela que dá a orientação positiva ao plano.
$X \in parabola \iff \text{dist}(X, F) = \text{dist}(X, X') = \text{dist}(X, d)$

Seja p a distância entre o foco F e a diretriz d ($p = |\overrightarrow{FA}|$).

Então, $F = (\frac{p}{2}, 0)$ e $d : \begin{cases} x = -\dfrac{p}{2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ em coordenadas.

Um ponto $X = (x, y)$ deste plano satisfaz a condição de ser um ponto da parábola se $\text{dist}(X, F) = \text{dist}(X, d)$.

Imediatamente verificamos que O satisfaz esta condição, pela própria construção. Também verificamos que nenhum ponto do semiplano de Oy com $x < 0$ pode satisfazer esta condição.

Então, os pontos $X = (x, y)$ da parábola estão no semiplano fechado de Oy que contém F ($x \geq 0$).

Seja X' a projeção ortogonal de X sobre d de modo que $|\overrightarrow{XX'}|$ seja a distância de X a d. Como $X' = (-\frac{p}{2}, y)$, temos que $|\overrightarrow{XX'}| = |(x, y) - (-\frac{p}{2}, y)| = |(x + \frac{p}{2}, 0)| = x + \frac{p}{2}$.

A distância de X a F é $|\overrightarrow{FX}| = |(x,y) - (\frac{p}{2},0)| = |(x - (\frac{p}{2}, y) = \sqrt{(x-(\frac{p}{2})^2 + y^2}$.

Logo $\text{dist}(X,d) = \text{dist}(X,F) \iff x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-(\frac{p}{2})^2+y^2}$. Elevando ao quadrado, temos $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$. Simplificando, $\boxed{y^2 = 2px}$. Esta é a equação reduzida da parábola.

Esta equação corrobora as observações geométricas feitas anteriormente:

(1) A origem $O = (0,0)$ satisfaz a equação da parábola. É chamada vértice da parábola.

(2) Os pontos (x,y) da parábola satisfazem a condição $x \geq 0$, pois $y^2 \geq 0$.

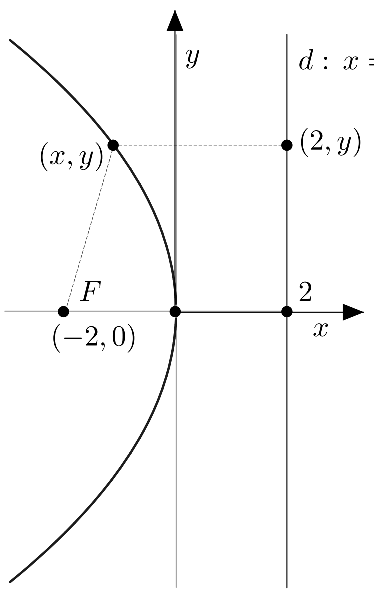
Além disso, vemos que a parábola é simétrica em relação ao eixo Ox, porque se $x_0, y_0)$ satisfaz a equação, então $x_0, -y_0)$ também: $(-y_0)^2 = y_o^2 = 2px_0$. Por esta razão, o eixo Ox é chamado eixo da parábola.

Alguns autores chamam p de parâmetro da parábola, porém, nestas notas, esta denominação será evitada para não confundir com o parâmetro de uma curva parametrizada. Estamos dizendo que, uma parametrização da curva parábola $y^2 = 8x$, por exemplo, pode ser dada pela aplicação $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\dfrac{t^2}{8}, t)$, $t \in \mathbb{R}$. As equações paramétricas da parábola $y^2 = 8x$ são

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{8} \\ y(t) = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Observamos também que outros autores utilizam p para denotar a semi-distância do foco à diretriz. Então, antes de utilizar a notação, veja a definição dentro do texto.

Fazendo a escolha do sistema de coordenadas $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$ de modo que o foco F esteja sobre o semi-eixo negativo de Ox, a equação fica $y^2 = -2px$, onde $p > 0$ é a distância do foco F à diretriz d, agora no semiplano $x > 0$.



Vemos neste caso, $y^2 = -2px$, tomando por exemplo $y^2 = -8x$ em que $8 = 2p$, que a abscissa de um ponto (x,y) da parábola tem que ser necessariamente não positiva ($x \leq 0$).

Temos:

$2p = 8 \Longrightarrow p = 4 =$ distância do foco à diretriz

Vértice $V = (0,0)$

$F = (-2,0) = (-\frac{p}{2}, 0)$

$$d : \begin{cases} x = 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

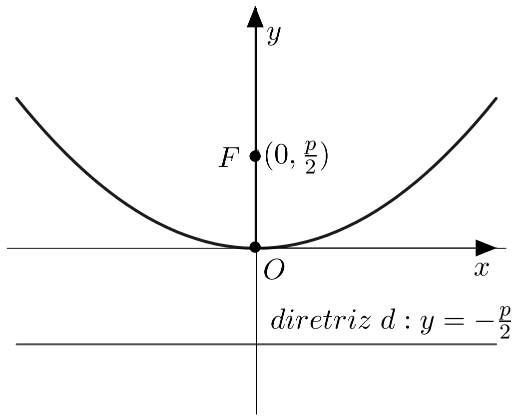
Equação: $y^2 = -8x$

Quando a escolha do sistema $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$ é feita de mode que F se situe no semi-eixo positivo Oy e vértice $V = (0,0)$, então a mesma condição geométrica que caracteriza a parábola ($X \in parabola \Longleftrightarrow \text{dist}(X, F) = \text{dist}(X, diretriz)$) implica na equação $x^2 = 2py$, ou seja,

$\boxed{y = \frac{x^2}{2p}}$, que é uma forma bem conhecida da função quadrática, cujo gráfico aprendemos como sendo uma parábola.

Esta parábola tem concavidade voltada para cima e $y \geq 0$ sempre. O eixo Oy é o eixo de simetria.

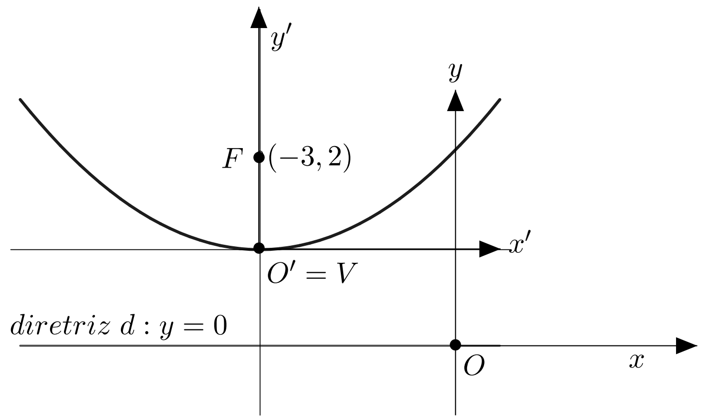
Uma parametrização desta parábola $x^2 = 2py$ é dada por $\alpha(x) = (t, \frac{1}{2p}x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.



Exercício: Deduzir a equação da parábola no sistema $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$ de modo que o foco se situe sobre o semi-eixo negativo de Oy e tenha $V = (0,0)$. Como fica a concavidade da curva? Existe algum eixo de simetria?

Suponhamos agora que uma parábola tenha foco $F = (-3, 2)$ e tenha como diretriz o eixo Ox, num sistema cartesiano. Qual é a equação da parábola neste sistema?

Observemos que estamos numa situação diferente em que não estamos escolhendo o sistema de referências, mas lidando com um sistema já dado. Então, não podemos de imediato escrever a equação como fizemos até agora.



O foco F sendo $(-3,2)$ e a diretriz $d : y = 0$, vemos inicialmente que $p = 2 = \text{dist}(F,d)$ e o vértice da parábola é $V = (-3,1)$.

Então, se o sistema fosse $\mathcal{S}' = \{O', x', y'\}$ como na ilustração, onde $O' = V$, e o eixo de simetria no eixo $O'y'$, com foco no semiplano $y' > 0$, a equação seria $(x')^2 = 2py'$. Logo, como $p = 2$, temos que $(x')^2 = 4y'$.

Os novos eixos $O'x'$ e $O'y'$ são paralelos aos eixos Ox e Oy, respectivamente, e mantendo a orientação. Isto significa que a base de vetores $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ define os eixos em ambas as coordenadas.

Mostremos que $x' = x - (-3)$ e $y' = y - 1$. De fato, $(x', y') = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = (x,y) - (-3,1) = (x+3, y-1)$. Todas as coordenadas aqui são dadas em relação à base $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$, que define os sistemas $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

Temos então a equação da parábola: $(x+3)^2 = 4(y-1)$.

Formalizando: Mudança de sistemas cartesianos com translação na origem

Seja $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$ um sistema de referencial cartesiano. Isto significa que temos uma base ortonormal $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ tal que $P = P_{\mathcal{S}} = (x,y) \iff \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

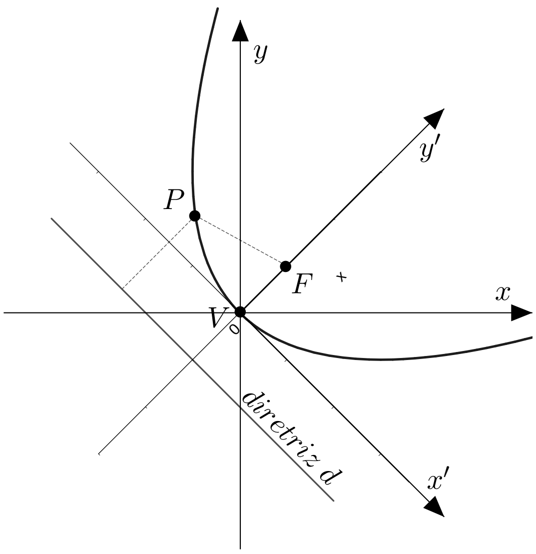
Considere $\mathcal{S}' = \{O', x', y'\}$ outro sistema no qual $O' = (a,b)$ no sistema $\mathcal{S}$, e a base de vetores é a mesma , ou seja, os eixos $O'x'$ e $O'y'$ são paralelos aos eixos Ox eOy, respectivamente, inclusive preservando as orientações, e as unidades são as mesmas. Logo, $P = P_{\mathcal{S}'} = (x', y') \iff \overrightarrow{O'P} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.

Então, como $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$, teremos $(x', y') = (x,y) - (a,b) = (x-a, y-b)$, *ou seja,* $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$.

A análise geométrica e algébrica que foi feita acima com a utilização de um sistema de referenciais cartesianos auxiliar funciona para o estudo de qualquer parábola que tenha eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados.

Suponhamos agora uma parábola com foco $F = (1, 1)$ e vértice $V = O = (0, 0)$. Qual a equação da parábola?

Como o eixo de simetria é a reta contendo o foco e o vértice, num sistema de coordenadas $\mathcal{S}' = \{O, x', y'\}$, onde a semi-reta positiva de Oy' é a semireta com origem O e contendo F, e Ox' perpendicular a Oy' por O, a equação da parábola é conhecida: $(x')^2 = 2py'$. Temos que $p = 2|\overrightarrow{VF}| = 2\sqrt{2}$. Falta então conhecermos como escrever x' e y' em termos de x e y.



Ora, se $\mathcal{C}' = \{\vec{I}, \vec{J}\}$ é a base de vetores que definem os eixos Ox' e Oy', temos que $\vec{J} = versor(\overrightarrow{VF}) = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}} = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ na base $\mathcal{C}$. Então $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Observe que $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$ é base ortonormal positiva.

Então $P = (x', y')$ no sistema $\mathcal{S}'$ se, e somente se, $\overrightarrow{OP} = x'\vec{I} + y'\vec{J} = x'(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) + y'(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y', -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y')$. Como $P = (x, y)$ no sistema $\mathcal{S}$, devemos ter $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$.

Matricialmente, $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Como a matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é matriz ortogonal $MM^t = M^tM = I$, $M^{-1} = M^t$ e portanto, $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

Então, $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$ e a equação da parábola $(x')^2 = 4\sqrt{2}y'$, reescrita no sistema original fica:

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y)^2 = 4\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$$

Formalizando: mudança de sistems cartesianos com rotação nos eixos

Seja $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$ um sistema de coordenadas cartesianas no plano.

Se $\mathcal{S}' = \{O, x', y'\}$ é outro sistema no qual a origem é a mesma mas a base de vetores $\mathcal{C}' = \{\vec{I}, \vec{J}\}$ é outra base ortonormal positiva, os novos eixos são obtidos rotacionando-se os eixos do sistema $\mathcal{S}$ em torno da origem e teremos que efetuar mudança de base de vetores.

Suponha que $\vec{I} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ e $\vec{J} = -b\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$. Seja $P = (x, y)$ no sistema $\mathcal{S}$.
Então, $P = (x', y')$ no sistema $\mathcal{S}'$ se, e somente se, $\overrightarrow{OP} = x'\vec{I} + y'\vec{J} = x'(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}) + y'(c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}) = (ax' + cy')\vec{\imath} + (bx' + dy')\vec{\jmath}$.

Assim, $P = (x, y) = (ax' + cy', bx' + dy')$, ou seja, $\begin{cases} x = ax' + cy' \\ y = bx' + dy' \end{cases}$.

Matricialmente,, $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Como a matriz $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ tem suas colunas iguais às coordenadas dos vetores da nova base $\mathcal{C}'$ escritas em relação à base $\mathcal{C}$, é invertível, e portanto, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Além disso, como $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são bases ortonormais, a matriz M é ortogonal, isto é, $M^{-1} = M^t =$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Logo, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ *e portanto,* $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

Lembrando que o novo sistema é obtido por meio de uma rotação do sistema original, temos que a matriz M é ortogonal da forma $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $a^2 + b^2 = 1$.

E se θ é a rotação que leva o eixo Ox no eixo Ox' (e o eixo Oy no eixo Oy'), $\vec{I} = (a, b) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $\vec{J} = (-b, a) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Então temos as equações de mudança:

$$\begin{cases} x = \cos\theta x' - \operatorname{sen}\theta y' \\ y = \operatorname{sen}\theta x' + \cos\theta y' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \cos\theta x + \operatorname{sen}\theta y \\ y' = -\operatorname{sen}\theta x + \cos\theta y \end{cases}$$

No último exemplo, os novos eixos estavam rodados de ângulo $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

Esta última mudança de coordenadas pode ser feita sempre que o eixo de simetria da parábola não for paralelo a qualquer eixo coordenado, mas o vértice continua na origem.

Numa situação mais geral, quando o vértice V não é mais a origem, e o eixo de simetria não é paralelo a nenhum dos eixos coordenadas, deve-se efetuar duas mudanças de coordenadas, uma envolvendo rotação dos eixos e uma outra envolvendo a translação na origem.

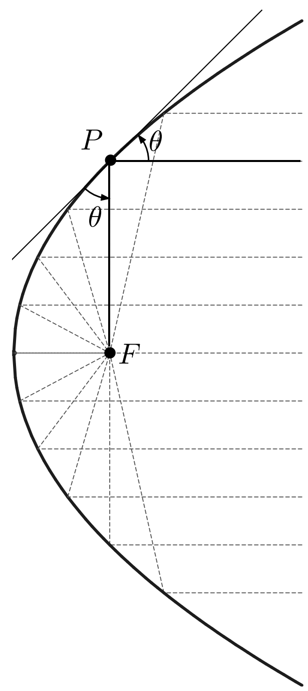
Exercício: Obter a equação de uma parábola com foco $F = (3, 2)$, $p = 3$ e eixo de simetria na direção do vetor $\vec{v} = (1, 1)$. Quantas parábolas existem satisfazendo as condições dadas? Qual a posição relativa entre elas?

Sugestão: Defina um sistema de coordenadas novo, $\mathcal{S}' = \{O', x', y'\}$, com origem sobre o vértice (existem duas possibilidades: quais?), que deve estar sobre a reta r passando por F e com direção dada por $\vec{v}$. Considere o novo eixo $O'y'$ na reta r, sendo o semieixo positivo aquele que contém F. Defina o eixo $O'x'$ de forma a obter um sistema com base positivamente orientada. Nesse sistema, obtenha a equação da parábola (em termos de x' e y'. Agora defina mais um sistema de coordenadas, $\mathcal{S}'' = \{O', x'', y''\}$ com mesma origem O' e eixos $O'x''$ e $O'y''$ paralelos aos eixos do sistema original $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$. Para passar a equação da parábola para sistema $\mathcal{S}'$ basta ver que o sistema $\mathcal{S}''$ é obtido do sistema $\mathcal{S}'$ por uma rotação nos eixos, e aplicar a mudança correspondente.

Para obter a equação no sistema original, basta agora aplicar a mudança descrita para translação na origem.

Observação: A parábola não tem um ponto de simetria. Só tem uma reta de simetria. Esta propriedade a destaca de todas as outras cônicas.

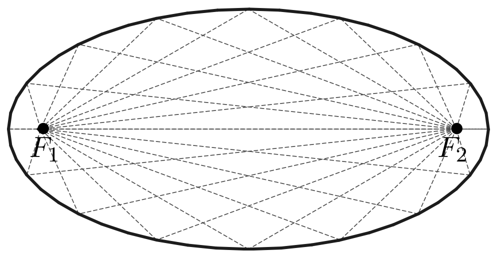
Observação: Uma propriedade importante da parábola é a propriedade focal: uma reta paralela ao eixo de simetria, incidente num ponto P da parábola, forma com a reta tangente à parábola em P um ângulo igual ao ângulo que a reta tangente forma com a reta $r(P, F)$. Girando a parábola em torno do eixo de simetria, temos uma superfície que é o formato das antenas parabólicas. A propriedade focal acima é largamente utilizada em antenas parabólicas e refletores.



5.4 Estudo da elipse

De maneira análoga ao estudo da parábola, vamos estudar a cônica elipse, a partir de suas propriedades geométricas:

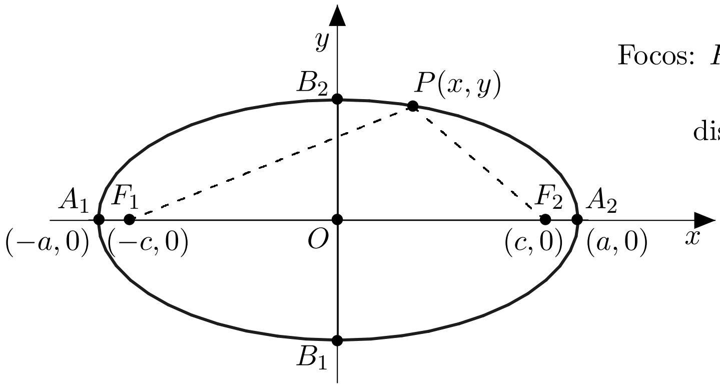
Uma elipse é um conjunto de pontos cuja soma das distâncias a dois pontos F_1 e F_2 é uma constante.



Então, os dados geométricos essenciais de uma elipse são os pontos F_1 eF_2 chamados focos da elipse, e uma medida fixada, que denotaremos por $2a$.

A distância entre F_1 e F_2 é chamada distância focal. Se denotarmos $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$, devemos ter claramente a condição $2a > 2c$, o que implica $a > c$. Quando $c = 0$, isto é, $F_1 = F_2$, a elipse se degernera numa circunferência. Há quem prefira não chamar a circunferência de elipse. Suponhamos então sempre $c > 0$ quando nos referirmos a uma elipse.

Para estudar analiticamente uma elipse, fixemos um sistema cartesiano adequado: $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$ em que O é o ponto médio do segmento F_1F_2, o eixo Ox contendo os focos, e o eixo Oy é a reta perpendicular a $r(F_1, F_2)$ por O.



Focos: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$

Ox: eixo focal

A reta contendo os focos é chamado eixo focal. Então o eixo Ox é o eixo focal, nestas coordenadas. Os focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Um ponto $P(x, y)$ é um ponto da elipse de focos F_1 e F_2 e constante $2a$, se $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$, por definição. Então $\sqrt{(x-(-c))^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Reescrevemos $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ e elevamos ambos os membros ao quadrado, obtendo $(x+c)^2 + \cancel{y}^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y}^2$.

Desenvolvendo e simplificando:

$\cancel{x}^2 + 2cx + \cancel{c}^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x}^2 - 2cx + \cancel{c}^2$

$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$(cx - a^2)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$

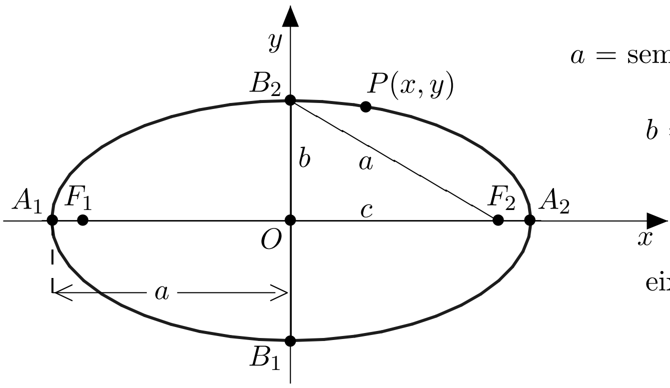
$c^2x^2 - \cancel{2}a^2cx + a^4 = a^2x^2 - \cancel{a}^2 2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Como $a > c$, existe um único $b > 0$ tal que $a^2 - c^2 = b^2$. Então a equação satisfeita por um ponto $P(x, y)$ da elipse no sistema cartesiano fixado é da forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ou ainda, $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$, chamada equação reduzida da elipse.

Podemos ver que a elipse nestas condições contém pontos dos eixos cartesianos. Efetivamente, os pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ no eixo Ox satisfazem a equação. Analogamente, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$ no eixo Oy. Estes 4 pontos são chamados vértices da elipse. Temos que O é o ponto médio de A_1A_2 e de B_1B_2.

Pela própria definição, temos $b < a$, sendo portando $2b = \text{dist}(B_1, B_2) < 2a$.



a = semi-eixo maior

b = semi-eixo menor

c = semi-distância focal

eixo maior sobre o eixo focal

$a^2 - c^2 = b^2$

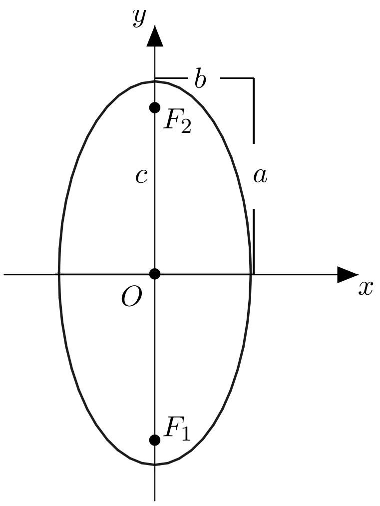
Como a equação analítica da elipse é quadrática em x e y, $\dfrac{(\pm x)^2}{a^2} + \dfrac{(\pm y)^2}{b^2} = 1$, e portanto temos que a elipse é simétrica em relação dos eixos Ox e Oy e em relação ao centro O.

A razão $\boxed{e = \dfrac{c}{a}}$ é chamada excentricidade da elipse, e no caso é sempre estritamente menor que 1. Não vamos discorrer sobre este conceito, mas deixamos registrado aqui que o significado geométrico da excentricidade pode ser dado por $e = \frac{\cos\beta}{\cos\theta}$, onde θ é o ângulo da geratriz do cone com o eixo e β é o ângulo entre o plano que secciona o cone com o eixo do cone, recuperando a origem da cônica como intersecção do cone com um plano. Assim, a excentricidade mede a inclinação relativa do plano em relação ao cone. Para a parábola, por exemplo, temos $e = 1$, já que $\beta = \theta$. Para a circunferência, como $\beta = \pi/2$, temos que $\cos\beta = 0$ e portanto, $e = 0$.

Numa elipse, temos $0 < e < 1$. Observemos que se $e \longrightarrow 0$ teríamos $c \longrightarrow 0$ e $a \longrightarrow b$ na equação da elipse, o que significa que a elipse teria focos cada vez mais próximos e a equação da elipse tenderia a $x^2 + y^2 = a^2$, que é a equação da circunferência com centro O e raio a.

Observamos que se a escolha do sistema cartesiano fosse com Oy contendo os focos, simétricos em relação a O (portanto, Ox conteria o eixo menor da elipse), teríamos a equação na forma

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, com $a > b$ e $a^2 - c^2 = b^2$.



a = semi-eixo maior

b = semi-eixo menor

c = semi-distância focal

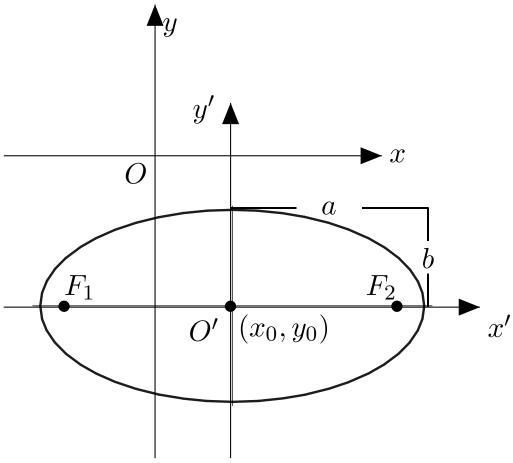
$a^2 - c^2 = b^2$

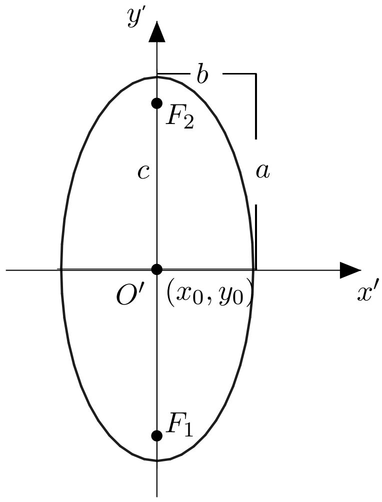
Oy = eixo focal) = centro

De maneira análoga ao estudo feito com parábola, se o eixo focal for paralelo a um dos eixos coordenados de um sistema cartesiano pré-estabelecido, então a equação da elipse fica na forma

(i) $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$ ou (ii) $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1}$

conforme o eixo focal é paralelo a Ox ou a Oy, respectivamente, com centro da elipse (ponto médio dos focos) em $O' = (x_0, y_0)$.





Exemplo: Suponha dada a equação quadrática $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$. Esta equação foi dada num sistema cartesiano fixado, e como contém termos com x e y, lineares e não quadráticos, não conseguimos identificar imediatamente a curva em questão. Vamos reescrever a equação: $4(x^2 -$

$2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0.$

O termo $x^2 - 2x$ pode ser "completado"como segue, sem, alterar o resultado: $x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$. Analogamente, $y^2 - 4y = y^2 - 4y + 4 - 4 = (y-2)^2 - 4$.

Assim,

$$\begin{aligned} 0 = \quad 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = \quad & 4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y-2)^2 - 4] + 4 = \\ & 4(x-1)^2 - 4 + 9(y-2)^2 - 36 + 4 = \\ & 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 - 36, \end{aligned}$$

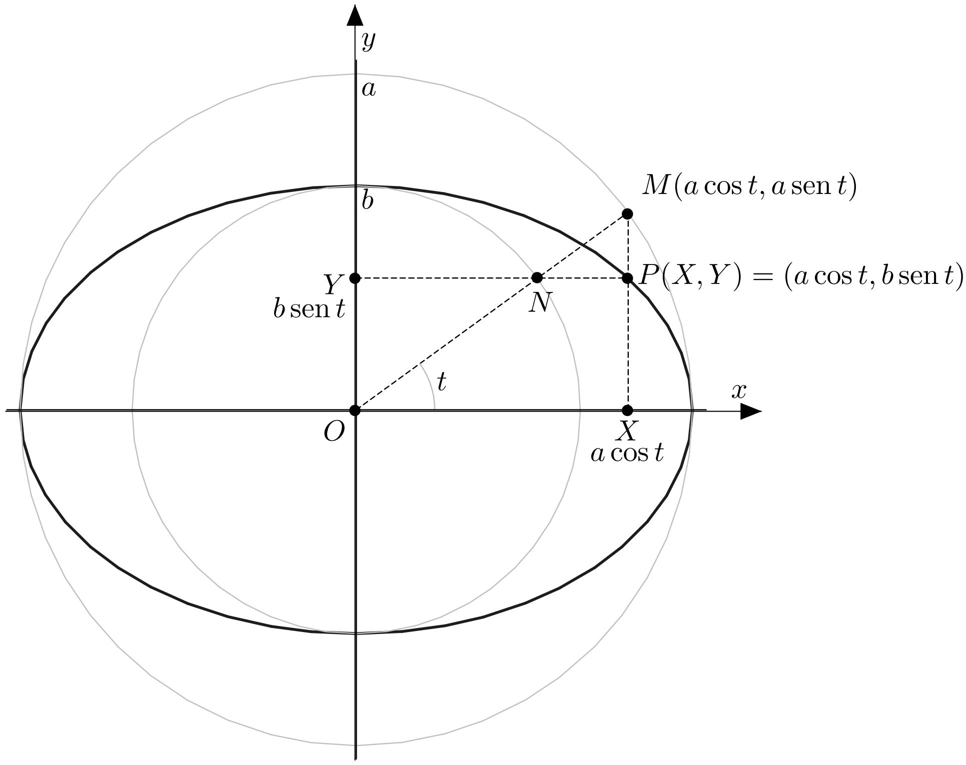
donde, $4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$, e portanto, $\dfrac{4(x-1)^2}{36} + \dfrac{9(y-2)^2}{36} = 1$

Logo, $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$, que é a equação reduzida de uma elipse com semi-eixo maior $\sqrt{9} = 3 = a$, semi-eixo menor $\sqrt{4} = 2 = b$, centro $O1, 2)$, eixo focal paralelo a Ox, semi-distância focal $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, excentricidade $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Calcule as coordenadas dos vértices e dos focos, como exercício.

Lembre-se que no sistem $\mathcal{S}' = \{O', x', y'\}$, a equação da elipse é $\dfrac{(x')^2}{9} + \dfrac{(y')^2}{4} = 1$ em que $(x', y') = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = (x, y) - (1, 2)$.

Equação de uma elipse na forma paramétrica

Considere uma elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Observemos que por causa da simetria dessa elipse em relação aos dois eixos cartesianos, não existe uma forma de explicitá-la como gráfico de função $y = y(x)$ ou $x = x(y)$ de maneira a descrever a curva inteira. É claro que $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ e $y = -b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ para $-a \leq x \leq a$ expressam a elipse por partes. Consideremos então a seguinte figura:



No sistema cartesiano Oxy, considere duas circunferências com centro O, raios a e b respectivamente, com $a > b$. Seja t um parâmetro angular, medido no sentido anti-horário, a partir do semi-eixo positivo de Ox. Sejam M e N respectivamente pontos das circunferências de raio a e b, tais que as semi-retas OM e ON formem ângulo orientado t com o semi-eixo positivo Ox, como na figura. Então $M = (a\cos t, a \operatorname{sen} t)$ e $N = (b\cos t, b \operatorname{sen} t)$.

Seja $P = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$ ponto com a abscissa de M e a ordenada de N.

A relação trigonométrica básica mostra que P satisfaz a equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, para qualquer t.

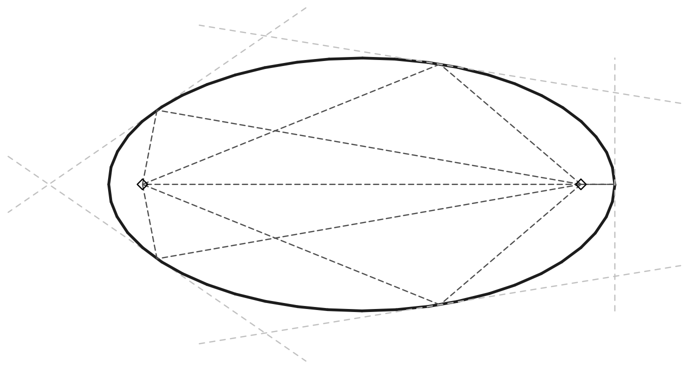
Logo, $\alpha(t) = (a\cos t,\ y = b \operatorname{sen} t),\ t \in \mathbb{R}$ define uma parametrização da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Localize como exercício os pontos $\alpha(0)$, $\alpha(\pi/4)$, $\alpha(4\pi)$ e $\alpha(3\pi/4)$ na elipse.

Esta parametrização vale também para $a < b$ na equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. E se o centro da elipse for um ponto $O' = (x_0, y_0)$, a parametrização fica $\alpha(t) = (x_0 + a\cos t,\ y_0 + y = b \operatorname{sen} t),\ t \in \mathbb{R}$

Propriedade focal da elipse

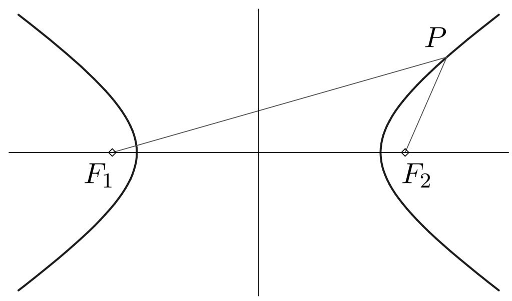
"Se P é um ponto da elipse de focos F_1 e F_2, então as semi-retas PF_1 e PF_2 formam ângulos iguais com a reta tangente à elipse em P". Esta propriedade é utilizada em espelhos elíticos dos dentistas e outras aplicações.envolvendo ótica e acústica.



5.5 Estudo da hipérbole

Uma hipérbole pode ser dada pela seguinte propriedade geométrica:

> "*Dados dois pontos F_1 e F_2, uma hipérbole é formada por pontos P cuja diferença entre as distâncias aos pontos F_1 e F_2, $|\,\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)|$, é uma constante positiva.*"



Assim, os dados geométricos essenciais de uma hipérbole são os pontos F_1 e F_2 chamados focos da hipérbole e uma medida fixada, denotada por $2a$, como no estudo da elipse.

A distância entre os focos é chamada distância focal e denotaremos $\mathrm{dist}(F_1, F_2) = 2c > 0$. No caso da hipérbole, a definição implica que devemos ter $a < c$.

Vamos fixar um sistema cartesiano $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$ adequado para deduzir a equação que um ponto $P = (x, y)$ deve satisfazer, de acordo com a definição.

Considere o ponto O o ponto médio do segmento F_1F_2 e o eixo Ox sendo a reta suporte de F_1F_2, isto é, Ox será o eixo focal e, Oy será a mediatriz de F_1F_2.

Sejam $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ neste sistema. Observamos que se $P = (x, y)$ for um ponto da hipérbole, devemos ter $|\operatorname{dist}(P, F_1) - \operatorname{dist}(P, F_2)| = 2a$, ou seja, $\operatorname{dist}(P, F_1) - \operatorname{dist}(P, F_2) = \pm 2a$.

Então, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$, donde
$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Elevando ambos os membros ao quadrado,
$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2}$
$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2}$
$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, donde $cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Elevando ao quadrado, $(cx - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$, donde
$c^2x^2 - 2\cancel{a^2}cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^2x^2 - 2\cancel{a^2}cx + a^2c^2 + a^2y^2$ e portanto $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$.

Como $c > a$, existe um único número positivo b tal que $c^2 - a^2 = b^2$. Então $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, ou seja, $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$. Esta equação é chamada equação reduzida da hipérbole.

Notemos que da equação seguem algumas propriedades importantes:

- O é ponto de simetria da hipérbole, chamado centro da hipérbole.

- Os eixos Ox e Oy são eixos de simetria da hipérbole.

- Não existem pontos da hipérbole sobre o eixo Oy, quando o eixo focal é Ox. De fato, fazendo $x = 0$ na equação reduzida, temos $-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, que não é satisfeita por nenhum ponto $(0, y)$ do eixo Oy.

  Assim, a hipérbole é constituída de 2 componentes disjuntas, chamadas ramos da hipérbole.

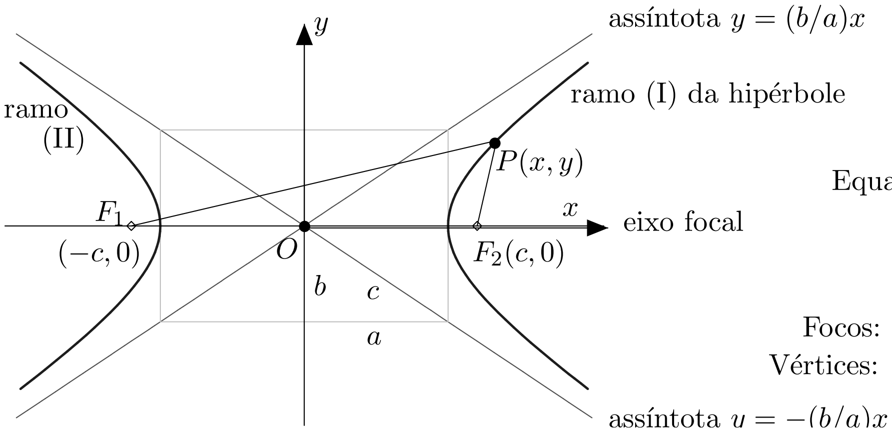
- O eixo Ox contém apenas 2 pontos da hipérbole, chamados vértices da hipérbole. Fazendo $y = 0$ na equação, temos $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$, donde $x = \pm a$. Logo $V_1 = (-a, 0)$ e $V_2 = (a, 0)$ são os únicos pontos da hipérbole sobre o eixo focal.

- Uma análise da equação da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ mostra que a equação pode ser reescrita como $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 1$, donde os fatores devem ter necessariamente o mesmo sinal, isto é,

$\boxed{\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} > 0 \text{ e } \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} > 0}$(I) ou $\boxed{\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} < 0 \text{ e } \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} < 0}$(II).

No primeiro caso, os pontos da hipérbole satisfazem $y < \dfrac{b}{a}x$ e $y > -\dfrac{b}{a}x$, representado na figura como ramo (I).

No segundo caso, os pontos da hipérbole satisfazem $y > \dfrac{b}{a}x$ e $y < -\dfrac{b}{a}x$, representado na figura como ramo (II).



Equação: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

$b^2 = c^2 - a^2$

Centro: $O = (0, 0)$

Focos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$

Vértices: $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$

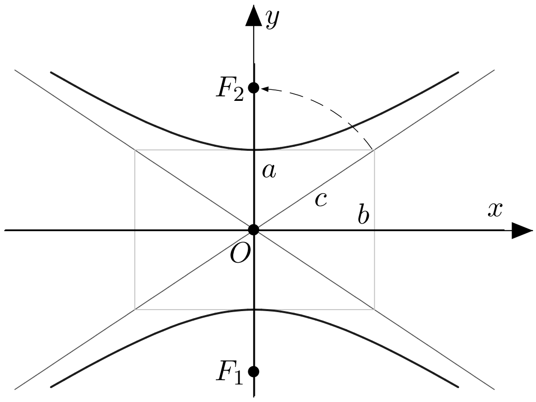
As retas $y = \dfrac{b}{a}x$ e $y = -\dfrac{b}{a}x$ que delimitam as regiões do plano em que os ramos se encontram são chamadas <u>assintotas</u> da hipérbole, e geometricamente são as retas que contém as diagonais do retângulo com centro O e lados $2a$ e $2b$, paralelos respectivamente ao eixos Ox e Oy. Confira na figura.

A função real $y(x) = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$, $x \geq a$ descreve os pontos (x, y) da hipérbole para $y > 0$. Pode-se mostrar que $y(x) \longrightarrow \infty$ e $y(x) \longrightarrow \dfrac{b}{a}x$ quando $x \longrightarrow \infty$. ($\longrightarrow$ = "tende a"), o que significa que os pontos da hipérbole com $x > a$, $y > 0$ se aproximam dos pontos da reta $y = \frac{b}{a}x$ à medida que x cresce. Daí o nome de assíntota.

Análogamente, os pontos da hipérbole $x > a$, $y < 0$ se aproximam cada vez mais da assíntota $y = -\frac{b}{a}x$ quando $x \longrightarrow \infty$. Os pontos da hipérbole com $x < -a$ e $y > 0$ tendem aos pontos da reta $y = -\frac{b}{a}x$ quando $x \longrightarrow -\infty$ e os pontos com $x < -a$ e $y < 0$ tendem aos pontos da assíntota $y = \frac{b}{a}x$ quando $\longrightarrow -\infty$.

Quando o sistema é escolhido de modo que o eixo Oy seja o eixo focal e o centro em O, a equação reduzida, com constante $2a$ fixada fica: $-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$.

Neste caso não existem pontos da hipérbole sobre o eixo Ox.



Hipérbole $\boxed{-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1}$

$b^2 = c^2 - a^2$

O = centro = ponto de simetria
Oy = eixo focal
Focos: $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$

Alguns autores chamam o eixo ortogonal ao eixo focal de eixo imaginário.

Observação 1: Não há necessidade de $a > b$ ou $b > a$ na notação da equação reduzida da hipérbole. A relação que deve ser observada é sempre $c > a$ e $c^2 - a^2 = b^2$, onde $2c$ é a distância focal e $2a$ é a constante da hipérbole.

Observação 2: A excentricidade da hipérbole é dada por $e = \dfrac{c}{a} > 1$ e uma das interpretações geométricas é idêntica ao caso da elipse, isto é, $e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\theta}$, onde θ é o ângulo da geratriz do cone com o eixo, e β é o ângulo do plano com o eixo.

Observação 3: Quando o eixo focal é paralelo aos eixos cartesianos de um sistema fixado, e o centro (ponto médio entre os focos, ponto de simetria) tem coordenadas $O' = (x_0, y_0)$, as equações reduzidas das hipérboles assumem a forma (reveja prábolas e elipses)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \text{ (quando o eixo focal é paralelo ao eixo } Ox)$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 \text{ (quando o eixo focal é paralelo ao eixo } Oy)$$

Observação 4: As hipérboles $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ são ditas conjugadas e possuem o mesmo par de retas assíntotas.

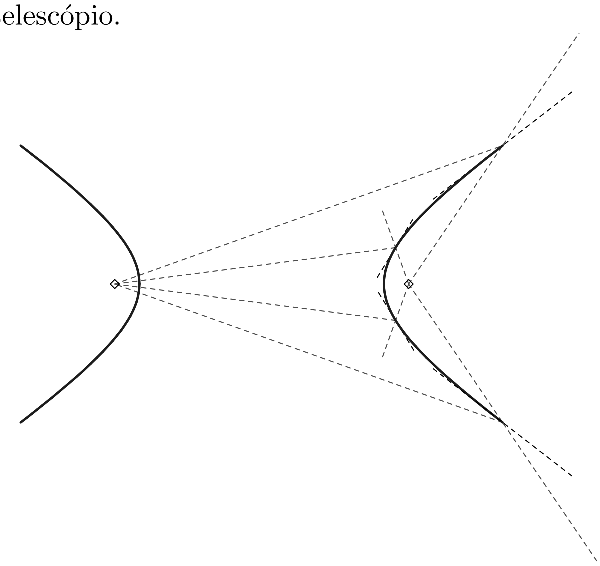
Observação 5: Uma parametrização clássica da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é dada por $(x(t), y(t)) = (a\cosh t, b\,\mathrm{senh}\, t)$, $t \in \mathbb{R}$ para o ramo (I) e $(x(t), y(t)) = (-a\cosh t, b\,\mathrm{senh}\, t)$, $t \in \mathbb{R}$ para o ramo (II), onde $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\operatorname{senh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, definem as funções chamadas cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, respectivamente.

Propriedade focal da hipérbole

Como no caso da elipse, a hipérbole tem propriedade focal:

"Se P é um ponto da hipérbole de focos F_1 e F_2, então as semi-retas PF_1 e PF_2 formam ângulos iguais com a reta tangente à hipérbole em P".

Esta propriedade também é utilizada em aplicações envolvendo ótica, como em contrução de um certo tipo de telescópio.



5.6 Classificação das cônicas

Todas as cônicas que obtivemos satisfazem uma equação polinomial de grau 2 em duas variáveis, num sistema de coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$.

$$p(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

A parte quadrática da equação é $Q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, a parte linear é $L(x, y) = 2a_{13}x + 2a_{23}y$ e a_{33} é o termo constante. Para termos uma cônica, a parte quadrática não é nula.

Lembremos que o termo misto apareceu quando o eixo de simetria não era paralelo a nenhum eixo coordenado e o termo linear não aparecia quando a origem era o centro da cônica.

Então, encontrar o centro $C = (x_0, y_0)$ da cônica é encontrar $O' = (x_0, y_0)$ tal que no novo sistema $\mathcal{S}' = \{O', x', y'\}$ com novos eixos coordenados paralelos aos eixos do sistema $\mathcal{S} = \{O, x, y\}$, a equação da cônica não tenha termos lineares.

Vimos durante o estudo da parábola que a mudança de coordenadas é dada por $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$

Substituindo na equação da cônica temos:

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} = 0$$

donde,

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x' + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y' + p(x_0, y_0) = 0$$

Então, para a nova equação não ter termos lineares, $(x0, y_0)$ deve satisfzer $a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13} = 0$ e $a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$.

Observe que os coeficientes desse sistema linear são os termos das duas primeiras linhas da matriz simétrica (<u>matriz da cônica</u>)

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a equação $p(x, y) = 4x^2+9y^2-8x-36y+4 = 0$ tem a matriz $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ -4 & -18 & 4 \end{bmatrix}$

Logo, o centro (x_0, y_0) é solução do sistema $\begin{cases} 4x_0 - 4 = 0 \\ 9y_0 - 18 = 0 \end{cases}$, donde $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Como $p(1, 2) = -36$, a nova equação fica $4(x')^2 + 9(y')^2 - 36 = 0$, como obtivemos com completamento de quadrados anteriormente.

Quando o sistema para o cálculo do centro é impossível, temos o único caso de cônica sem centro, que é a parábola.

Suponhamos agora somente as cônicas com centro ($C = (0,0)$)

Se a equação for da forma $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$, sem termo misto $2a_{12}xy$, então já podemos classificar:

1. $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ e $a_{33} < 0$: elipse
   Ídem para $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ e $a_{33} > 0$
   Em ambos os casos, se $a_{11} = a_{22}$, a elipse é uma circunferência

2. $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ e $a_{33} > 0$: vazio
   Ídem para $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ e $a_{33} < 0$

3. $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ e $a_{33} = 0$: um ponto
   Ídem para $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ e $a_{33} = 0$

4. $a_{11}a_{22} < 0$ e $a_{33} \neq 0$: hipérbole

5. $a_{11}a_{22} < 0$ e $a_{33} = 0$: 2 retas concorrentes

6. $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ e $a_{11}a_{33} < 0$: 2 retas paralelas
   Ídem para $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$ e $a_{22}a_{33} < 0$.

7. $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ e $a_{11}a_{33} > 0$: vazio
   Ídem para $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$ e $a_{22}a_{33} > 0$.

8. $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ e $a_{33} = 0$: uma reta
   Ídem para $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$ e $a_{33} = 0$.

Exemplos:

Ex 1: $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ é uma elipse assim como $-4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$
$4x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ é uma circunferência

Ex 2: $4x^2 + 9y^2 + 36 = 0$ e $-4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$: vazio

Ex 3: $4x^2 + 9y^2 = 0$ e $-4x^2 - 9y^2 = 0$: um ponto

Ex 4: $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$ e $-4x^2 + 9y^2 + 36 = 0$: hipérbole

Ex 5: $4x^2 - 9y^2 = 0$ e $-4x^2 + 9y^2 = 0$: 2 retas concorrentes

Ex 6: $4x^2 - 36 = 0$ e $9y^2 - 36 = 0$: 2 retas paralelas

Ex 7: $4x^2 + 36 = 0$ e $9y^2 + 36 = 0$: vazio

Ex 8: $4x^2 = 0$ e $9y^2 = 0$: uma reta

No caso de termos termo quadrático misto na equação da cônica com centro (já devidamente colocado na origem), temos:

$$p(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

Uma rotação nos eixos para deixar os eixos de simetria iguais aos eixos coordenados elimina o termo misto.

Vimos que as equações da rotação são dadas por $\begin{cases} x = \cos\theta x' - \operatorname{sen}\theta y' \\ y = \operatorname{sen}\theta\ x' + \cos\theta y' \end{cases}$, quando estudamos a parábola. Substituindo na equação acima, temos

$$a_{11}(\cos\theta x' - \operatorname{sen}\theta y')^2 + 2a_{12}(\cos\theta x' - \operatorname{sen}\theta y')(\operatorname{sen}\theta\ x' + \cos\theta y') + a_{22}(\operatorname{sen}\theta\ x' + \cos\theta y')^2 + a_{33} = 0$$

Logo, temos a equação $A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + D = 0$ onde

$A = a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + a_{22}\operatorname{sen}^2\theta$,

$B = -a_{11}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + a_{12}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + a_{22}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$

$= (a_{22} - a_{11})\operatorname{sen}\theta\cos\theta + a_{12}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$

$= -(a_{11} - a_{22})\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2} + a_{12}\cos 2\theta$,

$C = a_{11}\operatorname{sen}^2\theta - 2a_{12}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + a_{22}\cos^2\theta$ e

$D = a_{33}$

Assim, para termos $B = 0$ devemos ter:

- Se $a_{11} = a_{22}$, a rotação deve ser de $\theta = \pi/4$

  Neste caso, termos $A = \frac{1}{2}(a_{11} + 2a_{12} + a_{22}) = a_{11} + a_{12}$ e $C = a_{11} - a_{12}$.

- Caso contrário, a rotação deve ser tal que $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$.

  Neste caso, $|2\theta|$ é o ângulo do triângulo retângulo de cateto oposto $|2a_{12}|$ e cateto adjacente $|a_{11} - a22|$. Se $\operatorname{tg} 2\theta < 0$, posiciona-se o cateto oposto para baixo.

  Encontrando a direção da bissetriz como diagonal de um losango, obtém-se $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ desejado.

  Também pode-se mostrar que $A + C = a_{11} + a_{22}$ e $AC = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, ou seja, a rotação dos eixos preserva o <u>traço</u> (soma dos elementos da diagonal) e o <u>determinante</u> da matriz da forma quadrática Q.

Tanto as direções quanto os novos coeficientes são facilmente obtidos se utilizarmos a técnica de <u>auto-valores</u> e <u>autovetores</u>, da Álgebra Linear.

No caso, utilizamos a matriz da parte quadrática: $Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$. Os <u>auto-valores</u> de Q são as raízes λ_1 e λ_2 do polinômio obtido quando se faz $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$.

Um auto-vetor de Q associado ao auto-valor λ é um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b)$ tal que

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A nova equação da cônica fica $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + a_{33} = 0$, onde o eixo Ox' tem a direção do auto-vetor de λ_1.

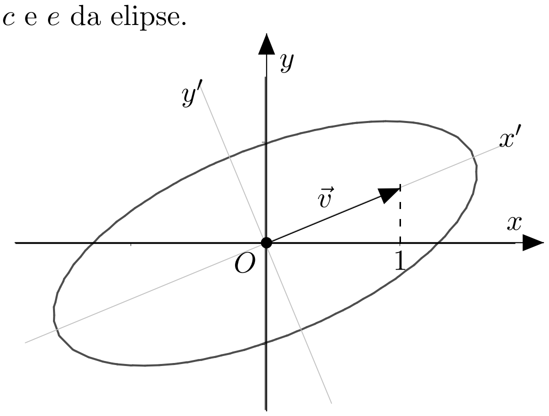
Por exemplo, a cônica de equação $x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0$, tem centro na origem (pois a equação não tem termos lineares) e eixo(s) de simetria não paralelo a eixo coordenado.

A matriz da parte quadrática da cônica é $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Para calcular os autovalores, achamos o polinômio $p(\lambda) = det(Q - \lambda I) = \begin{Vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{Vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2$.

As raízes do polinômio, também conhecido como <u>polinômio característico</u> de Q, são $\lambda_1 = \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 2+\sqrt{2}$.

Logo, existe um sistema cartesiano $\mathcal{S}' = \{O, x', y'\}$, onde a equação fica $(2+\sqrt{2})(x')^2 + (2-\sqrt{2})(y')^2 - 1 = 0$. Como $2 \pm \sqrt{2} > 0$ e o termo constante é $-1 < 0$, temos que a cônica é uma elipse. Exercício: calcular a, b, c e e da elipse.



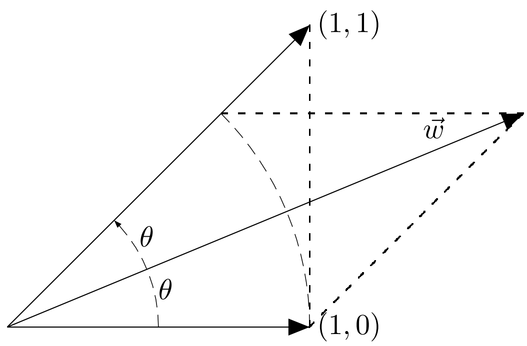
Para desenhar, precisamos saber a direção do eixo Ox'. Para isso, vamos calcular um auto-vetor de Q, associado ao auto-valor $\lambda_1 = 2-\sqrt{2}$, que é um vetor não nulo $\vec{v} = (x, y)$ que satisfaz $(Q - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$.

Devemos ter $\begin{bmatrix} 1-(2-\sqrt{2}) & -1 \\ -1 & 3-(2-\sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como λ_1 foi calculado para esse sistema ter solução não nula, com certeza a segunda linha é múltipla da primeira. Logo, basta resolver $(-1+\sqrt{2})x - y = 0$, ou seja, $\vec{v} = (1, -1+\sqrt{2}) \approx (1, 0.4142)$ define a direção do eixo Ox'.

No caso de não utilizarmos os auto-valores e auto-vetores, temos que $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{-2}{1-3} = \dfrac{1}{1}$. Então o ângulo 2θ do triângulo de cateto oposto 1 e cateto adjacente1 pode ser dada pelos vetores $\vec{u} = (1,0)$ e $\vec{v} = (1,1)$, que definem os lados do triângulo que concorrem no ângulo.



A bissetriz do ângulo pode ser dada por $\vec{w} = (1,0) + versor(1,1) = (1,0) + \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}$.

A direção deste vetor é paralelo ou perpendicular ao auto-vetor $\vec{v}$ obtido acima.

Fica como exercício verificar se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos, e obter os coeficientes A e C, através dos ângulos obtidos.

Agora, de $A+C=4$ e $AC=2$, devemos ter $C=2/A$ donde $4=A+2/A=(A^2+2)/A$ e portanto $A^2+2=4A \Longrightarrow A^2-4A+2=0$, chegando que A é um dos autovalores de $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

No caso de parábolas, ao se tentar calcular o centro, vimos que este não existe. Para desenhá-lo, num caso geral, primeiro se aplica a rotação dos eixos de forma que o termo misto desapareça, exatamente como foi feito acima, tomando o cuidado de alterar a parte linear. Esta rotação dos eixos coordenados deixa o eixo de simetria da parábola paralelo a um dos novos eixos coordenados.

Depois, faz-se uma translação da origem para que o vértice fique na nova origem.

Comandos no Maple

```
with(linalg):  # para carregar o pacote linalg
with(plots):  # para carregar o pacote de gráficos básicos

plot([3*cos(t),2*sin(t),t=-Pi..Pi],scaling=constrained);
   # desenha a elipse parametrizada
implicitplot(x^2/9+y^2/4=1, x=-3..3,y=-2..2, scaling=constrained);
   # desenha a elipse dada pela equação

theta := Pi/3;
plot3d([r*sin(theta)*cos(s),r*sin(theta)*sin(s),r*cos(theta)], r=-2..2,s=-Pi..Pi);
   # desenha o cone com eixo central Oz fazendo
   # ângulo theta com as geratrizes
implicitplot3d(x^2+y^2-z^2=0, x=-2..2,y=-2..2, z=-2..2);
   # tentativa de desenhar um cone pela equação,
   # mas haverá sempre um erro perto do vértice
```

...