



**CÁLCULO 4 – ECA – PROVA 1**

Prof. *Rildo Soares*

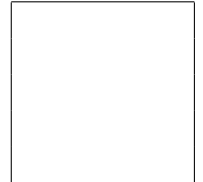
Nome completo: \_\_\_\_\_

Duração da prova: 2 horas. Data: 29/03/2018

**O aluno deverá desenvolver APENAS QUATRO questões da prova.**

**ATENÇÃO:** Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada. Onde estiver escrito **MOSTRE** ou **PROVE**, você deve mostrar ou provar. Onde estiver escrito **calcule**, basta calcular.

Nota



1. [2.5 pt] Calcule a derivada da função:

$$f(z) = \cos(z)$$

2. [2.5pt] Para a função  $f(z) = \frac{2z^2e^z - 2e^z}{z^2 - 1}$  determine:

- (a)(1.5) Qual a imagem de retas paralelas ao eixo  $x$  pela função  $f$ ?
- (b)(1.0) Calcule  $f'(i)$ .

3. [2.5 pt] Prove que a função  $u(x, y) = x^2 - y^2 - y$  é harmônica e determine sua conjugada harmônica  $v(x, y)$  de forma que  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  seja analítica. Calcule  $f'(z)$ .

4. [2.5pt] Prove que:

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{x - iy}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{x - iy}{2}\right) = \operatorname{sen}(\bar{z})$$

5. [2.5pt] Calcule

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + z} dz$$

onde  $C$  é o caminho dado por  $|z| = 2$ .

6. [2.5pt] Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Uma função analítica em todo domínio aberto  $D$ , menos apenas nos complexos  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset D$ . Seja  $\delta$  a menor distância entre dois dos  $z_i$ 's quaisquer, isto é,  $\delta = \min\{|z_i - z_j|, i \neq j\}$ . Considere os caminhos  $c_i = \delta e^{i\theta} + z_i$ , os círculos de centro em  $z_i$  e raio delta. Calcule:

$$\sum_{j=1, i \neq j}^n \int_{c_i} \frac{1}{z - z_j} dz$$

Explique sua resposta.

Boa Prova!