

Séries de Fourier

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

23 de abril de 2002

1 Produto Interno

O conceito de produto escalar pode ser estendido a certos espaços de funções.

Seja $\mathbb{V} = \mathcal{C}^0[a, b]$. A função que associa a cada par ordenado de funções f e g em \mathbb{V} , o escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

é chamada de **produto escalar** ou **interno** em \mathbb{V}

Por exemplo, se $f(t) = t, g(t) = e^t \in \mathcal{C}^0[0, 1]$, então

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 te^t dt = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1.$$

O produto interno satisfaz as seguintes propriedades, que são análogas às do produto escalar em \mathbb{R}^n :

- (a) Para todos os $f_1, f_2, g \in \mathbb{V}$, $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$;
- (b) Para todos os $f, g \in \mathbb{V}$ e todo escalar α , $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$;
- (c) Para todos os $f, g \in \mathbb{V}$, $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.
- (d) Para todo $f \in \mathbb{V}, f \neq \bar{0}$, $\langle f, f \rangle > 0$.

Vamos provar as propriedades de (a) a (d) acima. Sejam $f, g, h \in \mathcal{C}^0[a, b]$ e α um escalar.

- (a) $\langle f + g, h \rangle = \int_a^b (f(t) + g(t))h(t)dt = \int_a^b f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle.$
- (b) $\langle \alpha f, g \rangle = \int_a^b \alpha f(t)g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)g(t)dt = \alpha \langle f, g \rangle.$
- (c) $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle.$
- (d) Se $f \neq \bar{0}$, então, como f é contínua, existe um subintervalo de $[a, b]$, onde f^2 é limitada inferiormente por um número maior do que zero. Assim, $\langle f, f \rangle = \int_a^b (f(t))^2 dt > 0.$

Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$ o espaço vetorial das funções reais contínuas por partes $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Definindo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad \text{para todas as funções } f, g \in \mathcal{CP}^0[a, b]$$

temos um produto interno se considerarmos idênticas duas funções que diferem uma da outra apenas em um número finito de pontos. Também neste caso são válidas as propriedades de (a) a (d) acima. A demonstração é semelhante, por isso, deixamos como exercício para o leitor.

Usando as propriedades (a) a (d) acima podemos provar outras propriedades.

Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$ um espaço vetorial de funções com produto interno. São válidas as seguintes propriedades:

- (e) Para todos os $f, g_1, g_2 \in \mathbb{V}$, $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle;$
- (f) Para todos os $f, g \in \mathbb{V}$ e todo escalar α , $\langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle;$
- (g) $\langle f, f \rangle = 0$ se, e somente se, $f = \bar{0};$

Vamos provar as propriedades de (e) a (g) usando as propriedades de (a) a (d). Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$ e α um escalar.

- (e) $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle g_1 + g_2, f \rangle = \langle g_1, f \rangle + \langle g_2, f \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle;$
- (f) $\langle f, \alpha g \rangle = \langle \alpha g, f \rangle = \alpha \langle g, f \rangle = \alpha \langle g, f \rangle = \alpha \langle f, g \rangle;$
- (g) Se $f \neq \bar{0}$, então pela definição de produto interno, $\langle f, f \rangle > 0$. Se $f = \bar{0}$, então $\langle \bar{0}, \bar{0} \rangle = \langle \alpha \bar{0}, \bar{0} \rangle = \alpha \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle$, para todo escalar α . O que implica que $\langle \bar{0}, \bar{0} \rangle = 0$.

1.1 Norma

Assim como o produto escalar pode ser estendido ao \mathbb{R}^n e a certos espaços de funções, a noção de norma ou comprimento de um vetor pode ser estendida ao \mathbb{R}^n e a espaços de funções onde esteja definido um produto interno.

Definição 1. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$. Para todo vetor $f \in \mathbb{V}$, definimos a **norma** de f denotada por $\|f\|$ como sendo

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Exemplo 1. Sejam $f(t) = 1$, $g(t) = t$ e $h(t) = \cos \pi t$. Então

- $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 1 dt = 2$. Assim, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{2}$.
 - $\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 2/3$. Assim, $\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \sqrt{2/3}$.
 - $\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \int_{-1}^1 \cos^2 \pi t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 s ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2s) ds = \frac{1}{2\pi} (s \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \sin 2s \Big|_{-\pi}^{\pi}) = 1$. Assim, $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle} = 1$.
-

Proposição 1. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$.

- (a) Para todo $f \in \mathbb{V}$, $\|f\| \geq 0$ e $\|f\| = 0$ se, e somente se, $f = \bar{0}$;
 - (b) Para todo vetor $f \in \mathbb{V}$ e para todo escalar α , $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$;
 - (c) Para todos os vetores $f, g \in \mathbb{V}$, $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz);
 - (d) Para todos os vetores $f, g \in \mathbb{V}$, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Desigualdade triangular);
-

Demonstração. (a) Decorre das propriedades (d) e (g) do produto interno.

(b) $\|\alpha f\| = \sqrt{\langle \alpha f, \alpha f \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle f, f \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle f, f \rangle} = |\alpha| \|f\|.$

(c) A norma de $f + \lambda g$ é maior ou igual a zero, para qualquer escalar λ . Assim,

$$0 \leq \|f + \lambda g\|^2 = \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle = \|f\|^2 + 2\lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \|g\|^2 = p(\lambda).$$

Temos um polinômio do segundo grau que é maior ou igual a zero para todo λ . Isto implica que

$$\Delta = 4(\langle f, g \rangle)^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leq 0.$$

Logo, $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$

(d) Pelo item anterior temos que

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 \\ &\leq (\|f\| + \|g\|)^2; \end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada, segue o resultado. □

2 Ortogonalidade

Vamos, agora, estender ao espaço $\mathcal{CP}^0[a, b]$ o conceito de ortogonalidade.

Definição 2. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$. Dizemos que um subconjunto não vazio \mathcal{X} de \mathbb{V} é **ortogonal** se para todo par f e g de elementos distintos de \mathcal{X} , $\langle f, g \rangle = 0$. Neste caso dizemos que os elementos de \mathcal{X} são **ortogonais**.

Exemplo 2. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[-L, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[-L, L]$ em \mathbb{R} com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(t)g(t)dt.$$

Vamos mostrar que o conjunto

$$\left\{1, \cos \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\}$$

é ortogonal. Como as funções do conjunto, exceto a primeira, são funções cujas primitivas são periódicas de período igual a $2L/n$, então a integral de $-L$ a L destas funções é igual a zero e portanto elas são ortogonais à função constante 1.

$$\begin{aligned} \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \sin \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ns \sin ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)s + \sin(m-n)s] ds = 0 \end{aligned}$$

Para $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ns \cos ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds \\ &= \frac{L}{2\pi(m+n)} \sin(m+n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{L}{2\pi(m-n)} \sin(m-n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t}{L} \sin \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ns \sin ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 3. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[0, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[0, L]$ em \mathbb{R} com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(t)g(t)dt.$$

Vamos mostrar que os conjuntos

$$\left\{1, \cos \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\sin \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\}$$

são ortogonais.

$$\left\langle 1, \cos \frac{n\pi t}{L} \right\rangle = \int_0^L \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ns ds = \frac{L}{n\pi} \sin ns \Big|_0^{\pi} = 0$$

Para $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned}
 \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_0^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \cos ns \cos ms ds \\
 &= \frac{L}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds \\
 &= \frac{L}{2\pi(m+n)} \sin(m+n)s \Big|_0^\pi + \frac{L}{2\pi(m-n)} \sin(m-n)s \Big|_0^\pi = 0, \\
 \left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_0^L \sin \frac{n\pi t}{L} \sin \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \sin ns \sin ms ds \\
 &= \frac{L}{2\pi} \int_0^\pi [-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds = 0
 \end{aligned}$$

3 Convergência

Podemos estender a $\mathcal{CP}^0[a, b]$ o conceito de convergência de seqüência de números reais.

Definição 3. Uma seqüência de funções $\{f_m\} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_m, \dots\}$ de $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$ converge para um vetor f de \mathbb{V} se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0.$$

Neste caso escrevemos $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$.

Proposição 2. Se uma seqüência de vetores $\{f_m\}$ de $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$ converge para uma função f de \mathbb{V} , então esta função é única a menos dos seus valores em um número finito de pontos.

Demonstração. Vamos supor que $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = g$, então pela desigualdade triangular ([Proposição 1 na página 3](#)) temos que

$$\|f - g\| \leq \|f - f_m\| + \|g - f_m\|.$$

Passando ao limite obtemos que $\|f - g\| = 0$ o que implica que $f = g$ a menos de um número finito de pontos. \square

Proposição 3. Se uma seqüência de vetores $\{f_m\}$ de $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$ converge para uma função f de \mathbb{V} , então para todo vetor g de \mathbb{V} a seqüência de números reais $\{\langle f_m, g \rangle\}$ converge para $\langle f, g \rangle$. Ou seja, se $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$, então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, g \rangle = \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} f_m, g \right\rangle.$$

Demonstração. Seja $f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz ([Proposição 1 na página 3](#)), temos que

$$|\langle f_m, g \rangle - \langle f, g \rangle| = |\langle f_m - f, g \rangle| \leq \|f_m - f\| \|g\|.$$

Passando ao limite obtemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} |\langle f_m, g \rangle - \langle f, g \rangle| = 0$. O que implica que $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, g \rangle = \langle f, g \rangle$. \square

Definição 4. Uma **série de vetores** $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ de $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$ converge para uma função f de \mathbb{V} se o limite da seqüência das somas parciais converge para f , ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m f_n = f.$$

O seguinte resultado é uma conseqüência imediata da [Proposição 2](#).

Corolário 4. Se uma série de vetores $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ de $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$ converge para uma função f de \mathbb{V} , então, para toda função g de \mathbb{V} ,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \langle f_m, g \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} f_m, g \right\rangle.$$

Proposição 5. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[a, b]$, o espaço das funções contínuas por partes no intervalo $[a, b]$. Seja $\{g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$ um subconjunto de \mathbb{V} de vetores ortogonais não nulos. Se

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m,$$

então

$$c_m = \frac{\langle f, g_m \rangle}{\|g_m\|^2}, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstração. Seja $f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$. Fazendo o produto escalar de f com g_n , para $n = 0, 1, 2, \dots$, obtemos que

$$\langle f, g_n \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m, g_n \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \langle g_m, g_n \rangle = c_n \|g_n\|^2,$$

pois como os vetores g_m são ortogonais $\langle g_m, g_n \rangle = 0$, se $m \neq n$. Assim,

$$c_n = \frac{\langle f, g_n \rangle}{\|g_n\|^2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

□

4 Séries de Fourier

Exemplo 4. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[0, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[0, L]$ em \mathbb{R} com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(t)g(t)dt.$$

Já mostramos no **Exemplo 3** que o conjunto

$$\left\{1, \cos \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\}$$

é ortogonal. Vamos calcular as normas dos seus elementos.

$$\begin{aligned}\langle 1, 1 \rangle &= \int_0^L dt = L \\ \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{n\pi t}{L} \right\rangle &= \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 ns ds = \frac{L}{2\pi} \int_0^\pi [1 + \cos 2ns] ds = L/2\end{aligned}$$

Assim, para toda função $f \in \mathcal{CP}^0[0, L]$ que possa ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L},$$

teremos que os coeficientes da série serão dados por

$$a_m = \frac{\langle f, \cos \frac{m\pi t}{L} \rangle}{\|\cos \frac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 5. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[0, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[0, L]$ em \mathbb{R} com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(t)g(t)dt.$$

Já mostramos no **Exemplo 3** que o conjunto

$$\left\{ \text{sen} \frac{\pi t}{L}, \text{sen} \frac{2\pi t}{L}, \dots, \text{sen} \frac{n\pi t}{L}, \dots \right\}$$

é ortogonal. Vamos calcular as normas dos seus elementos.

$$\left\langle \text{sen} \frac{n\pi t}{L}, \text{sen} \frac{n\pi t}{L} \right\rangle = \int_0^L \text{sen}^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2 ns ds = \frac{L}{2\pi} \int_0^\pi [1 - \cos 2ns] ds = L/2$$

Assim, para toda função $f \in \mathcal{CP}^0[0, L]$ que possa ser escrita como a série

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

teremos que os coeficientes da série serão dados por

$$b_m = \frac{\langle f, \text{sen} \frac{m\pi t}{L} \rangle}{\|\text{sen} \frac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots$$

Exemplo 6. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathbb{V} = \mathcal{CP}^0[-L, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[-L, L]$ em \mathbb{R} com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(t)g(t)dt.$$

Já mostramos no **Exemplo 2** que o conjunto

$$\left\{1, \cos \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\}$$

é ortogonal. Vamos calcular as normas dos seus elementos.

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= \int_{-L}^L dt = 2L \\ \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{n\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ns ds = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2ns] ds = L \\ \left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ns ds = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2ns] ds = L \end{aligned}$$

Assim, para toda função $f \in \mathcal{CP}^0[-L, L]$ que possa ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi t}{L},$$

teremos que os coeficientes da série serão dados por

$$a_m = \frac{\langle f, \cos \frac{m\pi t}{L} \rangle}{\|\cos \frac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$b_m = \frac{\langle f, \sin \frac{m\pi t}{L} \rangle}{\|\sin \frac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \quad (2)$$

As séries dadas no **Exemplo 6** são chamadas de **Séries de Fourier**, as do **Exemplo 4** de **Séries de Fourier de cossenos** e as do **Exemplo 5** de **Séries de Fourier de senos**. Elas aparecem no estudo de certas equações diferenciais. Na **Proposição 5** fizemos a suposição de que a série $\sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$ convergia para a função f . Vamos considerar o problema inverso. Dada uma função $f \in \mathcal{CP}^0[-L, L]$ podemos calcular os coeficientes a_m e b_m usando (1) e (2) e nos perguntar se a série obtida converge ou não. O teorema

seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [3], afirma que para toda função f contínua por partes em $[-L, L]$, a série de Fourier de f converge.

Teorema 6. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função f pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}^0[-L, L]$, a série de Fourier de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

converge para f na norma $\|f\| = \left(\int_{-L}^L (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Se uma função $f \in \mathcal{CP}^0[-L, L]$ é par, isto é, $f(-t) = f(t)$, para todo $t \in [-L, L]$, e pode ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

então os coeficientes obtidos no Exemplo 6 são dados por:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = 0 \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ou seja, os coeficientes b_m são iguais a zero e os a_m são iguais aos dados no Exemplo 4.

Analogamente, se uma função $f \in \mathcal{CP}^0[-L, L]$ é ímpar, isto é, $f(-t) = -f(t)$, para todo $t \in [-L, L]$, e pode ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

então os coeficientes obtidos no **Exemplo 6** são dados por:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = 0 \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots$$

ou seja, os coeficientes a_m são iguais a zero e os b_m são iguais aos dados no **Exemplo 5**.

Para as funções f que são contínuas por partes em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par ou ímpar no intervalo $[-L, L]$ (verifique!). Assim, segue da observação que fizemos anteriormente, que as séries de Fourier de cossenos e de senos de f são séries de Fourier dos prolongamentos par e ímpar de f , respectivamente. Este raciocínio estende o resultado anterior para séries de Fourier de senos e de cossenos.

Corolário 7. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função f pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}^0[0, L]$, as séries de Fourier de cossenos de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L},$$

e de Fourier de senos de f

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots$$

convergem para f na norma $\|f\| = \left(\int_0^L (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Exemplo 7. *Seja L um número real maior que zero. Considere a função $f_{cd}^{(0)} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f_{cd}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL \leq t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } 0 \leq c < d \leq 1.$$

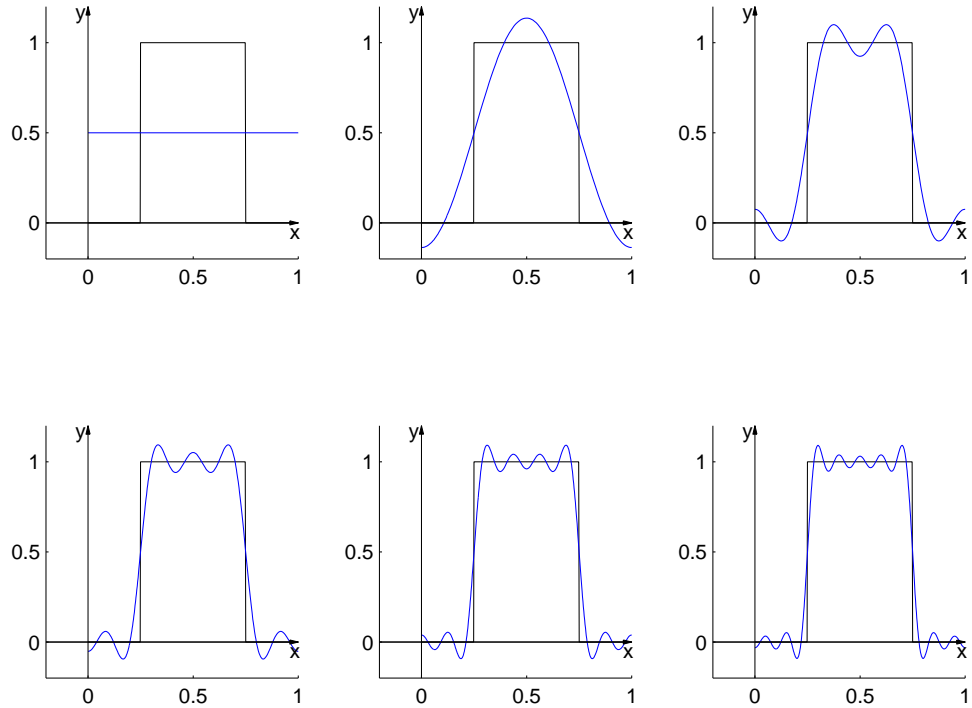


Figura 1: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de cossenos de f , para $n = 0, 2, 6, 10, 14, 18$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e de cossenos de $f_{cd}^{(0)}$. Para a série de cossenos temos que

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} dt = 2(d - c),$$

$$a_m = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{m\pi c}^{m\pi d}, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots$$

Assim a série de Fourier de cossenos de f é

$$f_{cd}^{(0)}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} = (d - c) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m\pi d - \operatorname{sen} m\pi c}{m} \cos \frac{m\pi t}{L}.$$

Observe que a série de Fourier de cossenos da função constante igual a 1, $f_{01}^{(0)}$, tem somente o primeiro termo diferente de zero que é igual a 1.

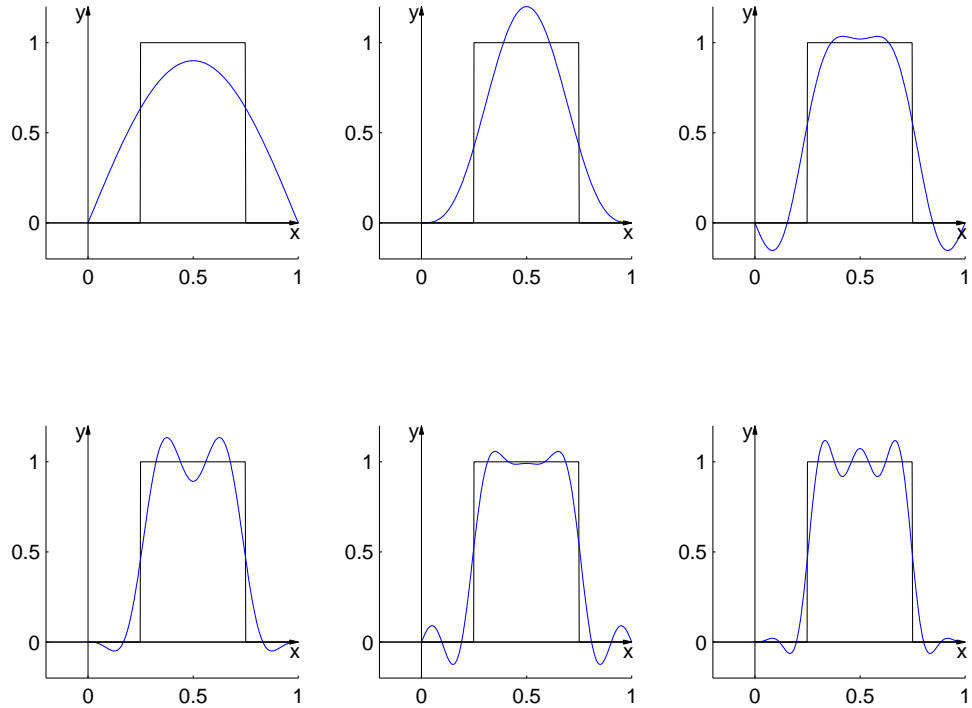


Figura 2: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de senos de f , para $n = 1, \dots, 6$

Para a série de senos temos que para $m = 1, 2, \dots$,

$$b_m = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = -\frac{2}{m\pi} \cos s \Big|_{m\pi c}^{m\pi d}$$

Assim, a série de Fourier de senos de $f_{cd}^{(0)}$ é dada por

$$f_{cd}^{(0)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\pi c - \cos m\pi d}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função constante igual a 1, $f_{01}^{(0)}$ os termos de índice par são iguais a zero e neste caso a série de senos de $f_{01}^{(0)}$ é dada por

$$f_{01}^{(0)}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi t}{L}$$

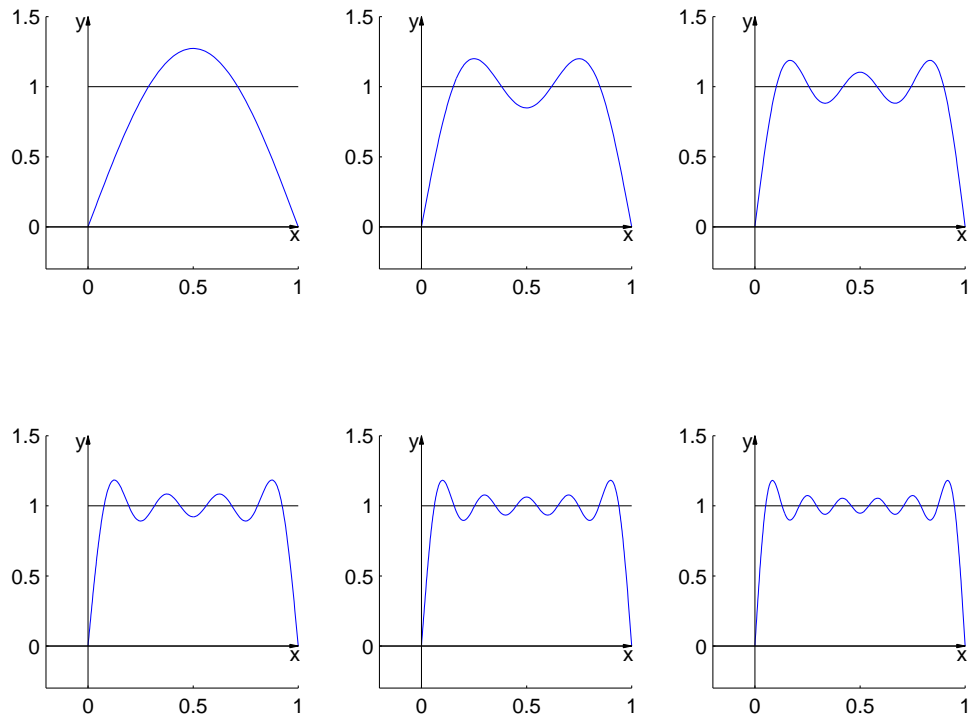


Figura 3: A função $f(t) = 1$ em $[0, 1]$ e as somas parciais da série de Fourier de senos de f , para $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

Exemplo 8. Considere a função $f_{cd}^{(1)} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{cd}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL \leq t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } 0 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e de cossenos de $f_{cd}^{(1)}$. Para a série de cossenos temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} t dt = L(d^2 - c^2) \\ a_m &= \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} t \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2L}{m^2 \pi^2} \int_{m\pi c}^{m\pi d} s \cos s ds \\ &= \frac{2L}{m^2 \pi^2} (s \sin s + \cos s) \Big|_{m\pi c}^{m\pi d} \end{aligned}$$

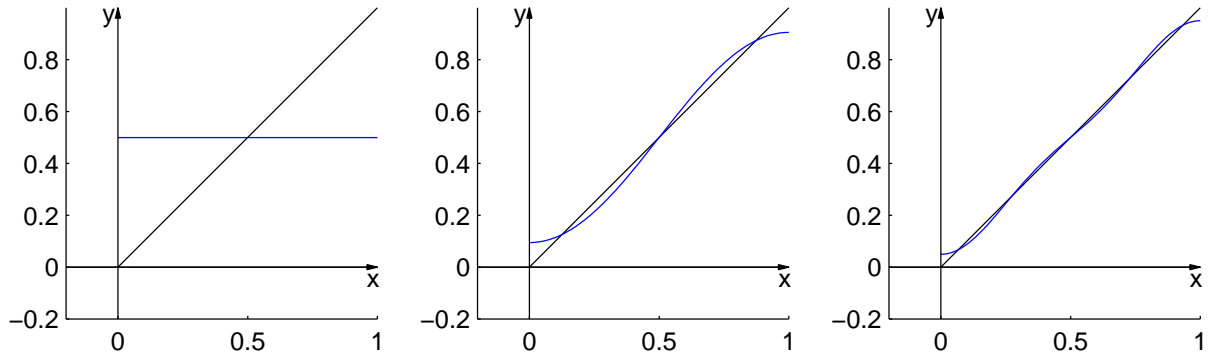


Figura 4: A função $f(t) = t$ em $[0, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 0, 1, 3$

Assim a série de Fourier de cossenos de f é

$$f_{cd}^{(1)}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} = \frac{L(d^2 - c^2)}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_{m\pi c}^{m\pi d}}{m^2} \cos \frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função $f_{cd}^{(1)}(t) = t$, para $0 \leq t \leq 1$, $f_{01}^{(1)}$, os termos de índice par são iguais a zero e neste caso a série de cossenos de $f_{01}^{(1)}$ é dada por

$$f_{01}^{(1)}(t) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi t}{L},$$

Para a série de senos temos que para $m = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} t \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2L}{m^2 \pi^2} \int_{m\pi c}^{m\pi d} s \operatorname{sen} s ds \\ &= \frac{2L}{m^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{m\pi c}^{m\pi d} \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de senos de $f_{cd}^{(1)}$ é dada por

$$f_{cd}^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} = \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{m\pi c}^{m\pi d}}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função $f(t) = t$, para $0 \leq t \leq 1$, $f_{01}^{(1)}$, temos que

$$b_m = \frac{2L}{m\pi} (-\cos m\pi) = \frac{(-1)^{m+1} 2L}{m\pi}$$

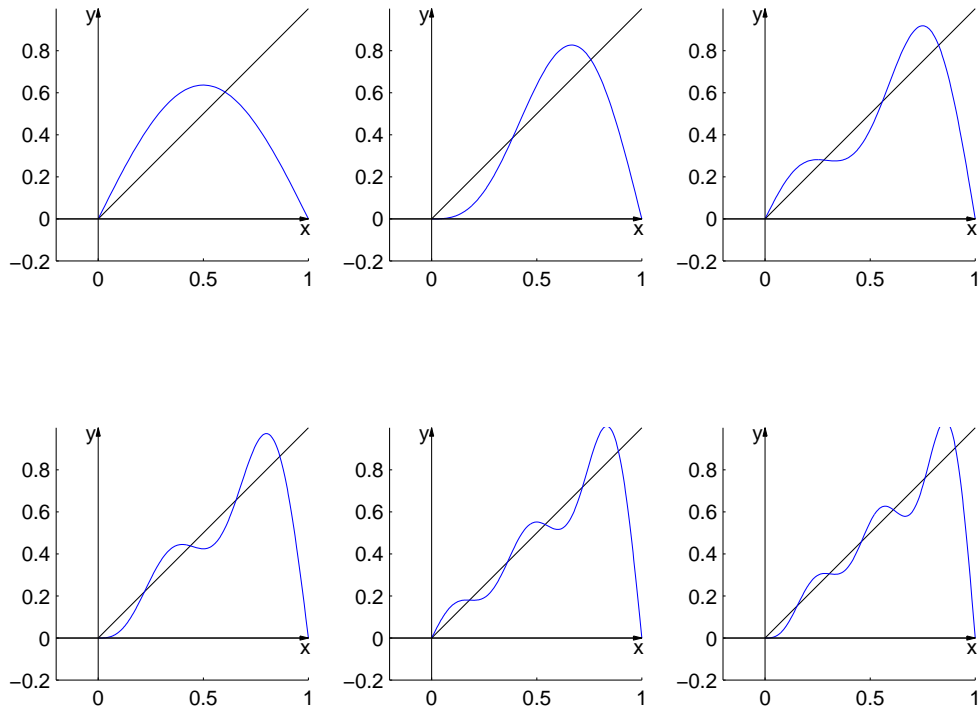


Figura 5: A função $f(t) = t$ em $[0, 1]$ e as somas parciais da série de Fourier de senos de f , para $n = 1, \dots, 6$

e neste caso a série de cossenos de $f_{01}^{(1)}$ é dada por

$$f_{01}^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L} = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \text{sen} \frac{m\pi t}{L}$$

Com os coeficientes das funções destes dois exemplos podemos determinar as séries de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas. Isto por que os coeficientes das séries dependem linearmente das funções, ou seja,

$$a_m(\alpha f + \beta g) = \alpha a_m(f) + \beta a_m(g) \quad \text{e} \quad a_m(\alpha f + \beta g) = \alpha a_m(f) + \beta a_m(g).$$

Por exemplo, a função

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq L/2 \\ L - t, & \text{se } L/2 < t \leq L \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$f = f_{0L/2}^{(1)} + Lf_{L/2L}^{(0)} - f_{L/2L}^{(1)}.$$

Assim os coeficientes a_m e b_m podem ser calculados como

$$a_m(f) = a_m(f_{0L/2}^{(1)}) + La_m(f_{L/2L}^{(0)}) - a_m(f_{L/2L}^{(1)})$$

$$b_m(f) = b_m(f_{0L/2}^{(1)}) + Lb_m(f_{L/2L}^{(0)}) - b_m(f_{L/2L}^{(1)})$$

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$	$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt$	$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt$
$f_{cd}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL \leq t \leq dL \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0 = 2(d - c)$ $a_m = \frac{2}{m\pi} \text{sen } s \Big _{m\pi c}^{m\pi d}$	$b_m = -\frac{2}{m\pi} \cos s \Big _{m\pi c}^{m\pi d}$
$f_{cd}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL \leq t \leq dL \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0 = L(d^2 - c^2)$ $a_m = \frac{2L}{m^2\pi^2} (s \text{sen } s + \cos s) \Big _{m\pi c}^{m\pi d}$	$b_m = \frac{2L}{m^2\pi^2} (-s \cos s + \text{sen } s) \Big _{m\pi c}^{m\pi d}$

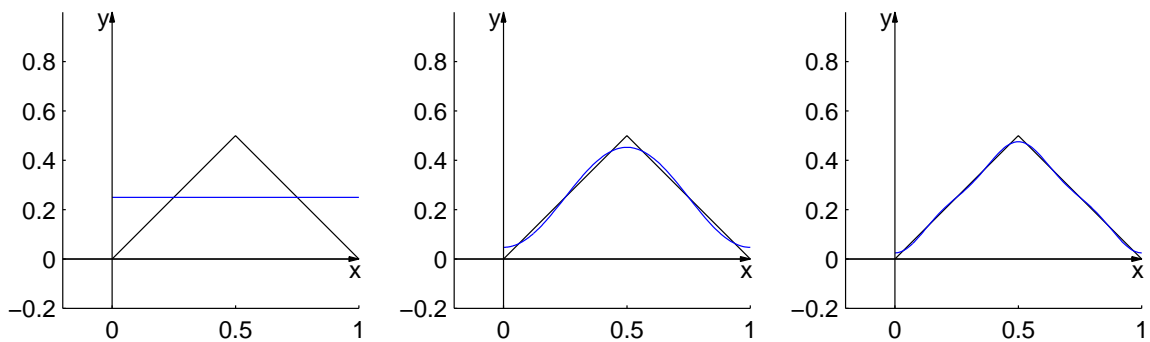


Figura 6: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ se $t \in [0, 1/2]$ e $f(t) = 1 - t$ se $t \in [1/2, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 0, 2, 6$

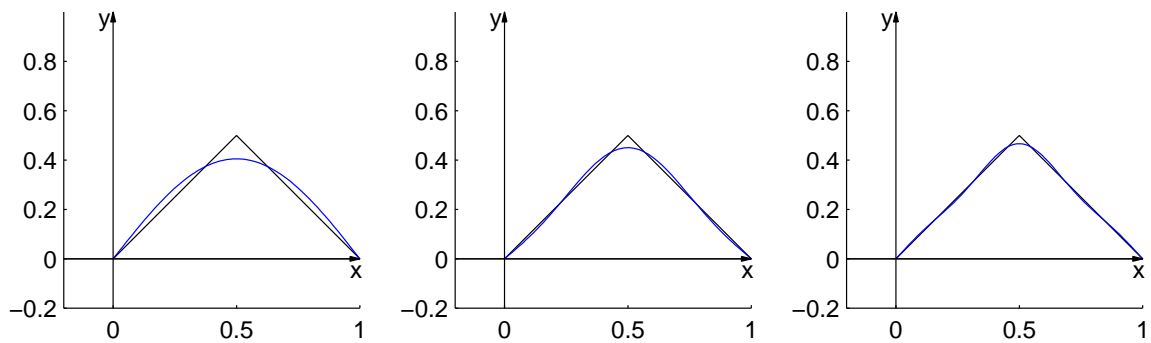


Figura 7: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ se $t \in [0, 1/2]$ e $f(t) = 1 - t$ se $t \in [1/2, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 1, 3, 5$

Exercícios Numéricos

Ache as séries de Fourier de senos e de cossenos das funções dadas:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < L/2, \\ 1, & \text{se } L/2 \leq x \leq L, \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } L/4 \leq x < 3L/4, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < L/2, \\ t, & \text{se } L/2 \leq x < L, \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < L/2 \\ L - x, & \text{se } L/2 \leq x \leq L \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < L/4 \\ L/4, & \text{se } L/4 \leq x < 3L/4 \\ L - x, & \text{se } 3L/4 < x \leq L \end{cases}$

Respostas dos Exercícios

1. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{m\pi}{2}}{m} \cos \frac{m\pi x}{L}.$
 $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi}{2} - (-1)^m}{m} \text{sen } \frac{m\pi x}{L}$

$$2. f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{3m\pi}{4} - \text{sen } \frac{m\pi}{4}}{m} \cos \frac{m\pi x}{L}.$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi}{4} - \cos \frac{3m\pi}{4}}{m} \text{sen } \frac{m\pi x}{L}$$

$$3. f(x) = \frac{3L}{8} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\pi - \cos \frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi}{2} \text{sen } \frac{m\pi}{2}}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{L}.$$

$$f(x) = \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2} - m\pi \cos m\pi - \text{sen } \frac{m\pi}{2}}{m^2} \text{sen } \frac{m\pi x}{L}$$

$$4. f(x) = \frac{L}{4} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cos \frac{m\pi}{2} - 1 - (-1)^m}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{L}.$$

$$f(x) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{m\pi}{2}}{m^2} \text{sen } \frac{m\pi x}{L}$$

$$5. f(x) = \frac{3L}{16} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi}{4} + \cos \frac{3m\pi}{4} - 1 - (-1)^m}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{L}.$$

$$f(x) = \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{m\pi}{4} + \text{sen } \frac{3m\pi}{4}}{m^2} \text{sen } \frac{m\pi x}{L}$$

Comandos do MATLAB:

>> V(i)=[] elimina a componente i do vetor V.

>> syms t diz ao MATLAB que a variável t é uma variável simbólica.

>> f=expr define uma função através da expr que deve ser uma expressão na variável simbólica t definida anteriormente.

Comandos do pacote GAAL:

>>proj(g,f,a,b) calcula

$$\frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2} g(t) = \left(\frac{1}{\int_a^b (g(t))^2 dt} \int_a^b f(t)g(t) dt \right) g(t).$$

Por exemplo: `>>proj(cos(5*pi*t),f,-pi,pi)` calcula

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(5\pi t))^2 dt} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(5\pi t) f(t) dt \right) \cos(5\pi t) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(5\pi t) f(t) dt \right) \cos(5\pi t) \\ &= a_5 \cos(5\pi t). \end{aligned}$$

`>>plotfproj(f,proj,a,b)` desenha as funções f e $\text{proj}(k)$, para k variando de 1 até o tamanho do vetor proj , no intervalo $[a,b]$.

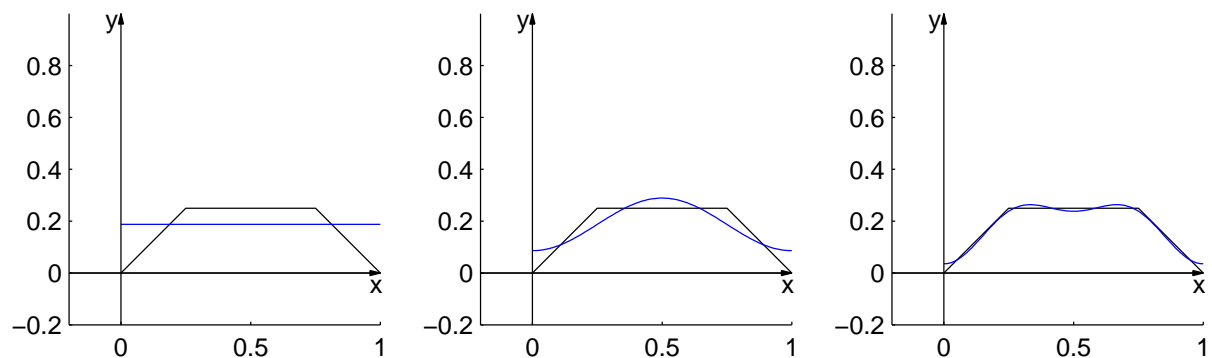


Figura 8: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [0, 1/4]$, $f(t) = 1/4$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 1 - t$, se $t \in [3/4, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 0, 1, 2$

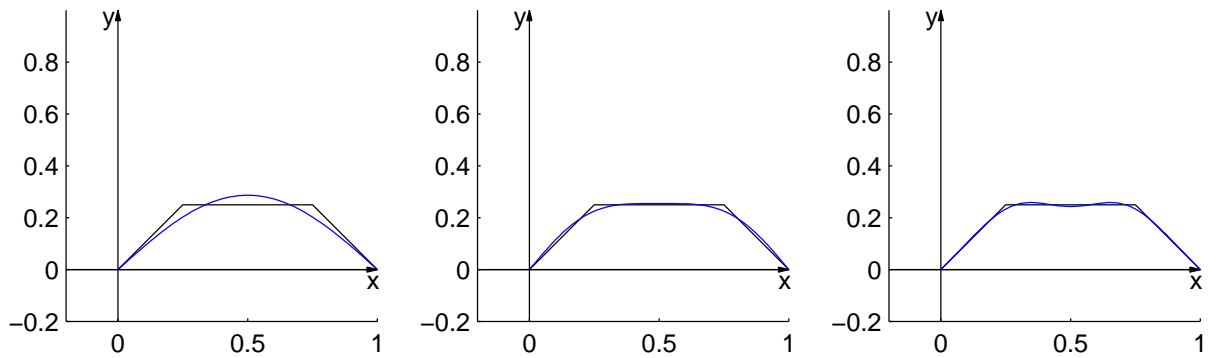


Figura 9: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [0, 1/4]$, $f(t) = 1/4$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 1 - t$, se $t \in [3/4, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de senos para $n = 1, 3, 5$

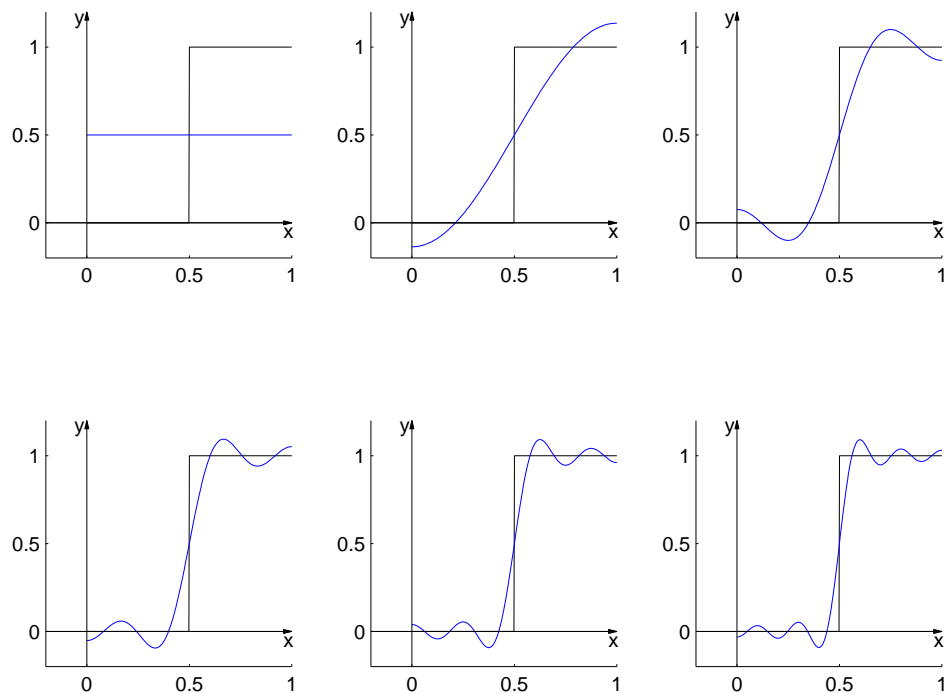


Figura 10: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/2, 1]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de cossenos de f , para $n = 0, 1, 3, 5, 7, 9$

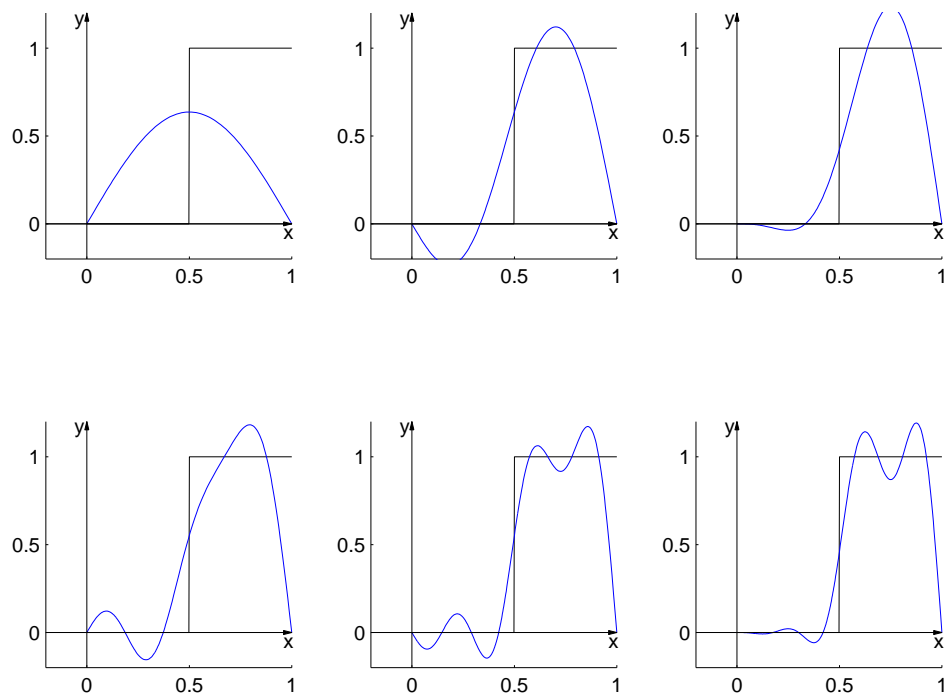


Figura 11: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/2, 1]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de senos de f , para $n = 1, 2, 3, 5, 6, 7$

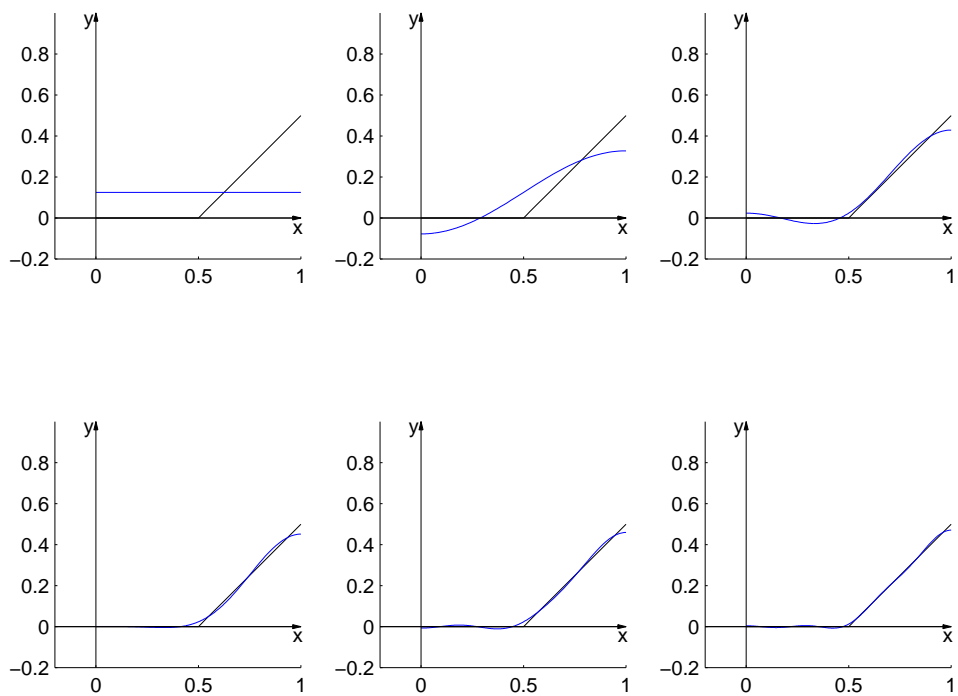


Figura 12: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [1/2, 1]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de cossenos de f , para $n = 0, 1, 2, 3, 5, 6$

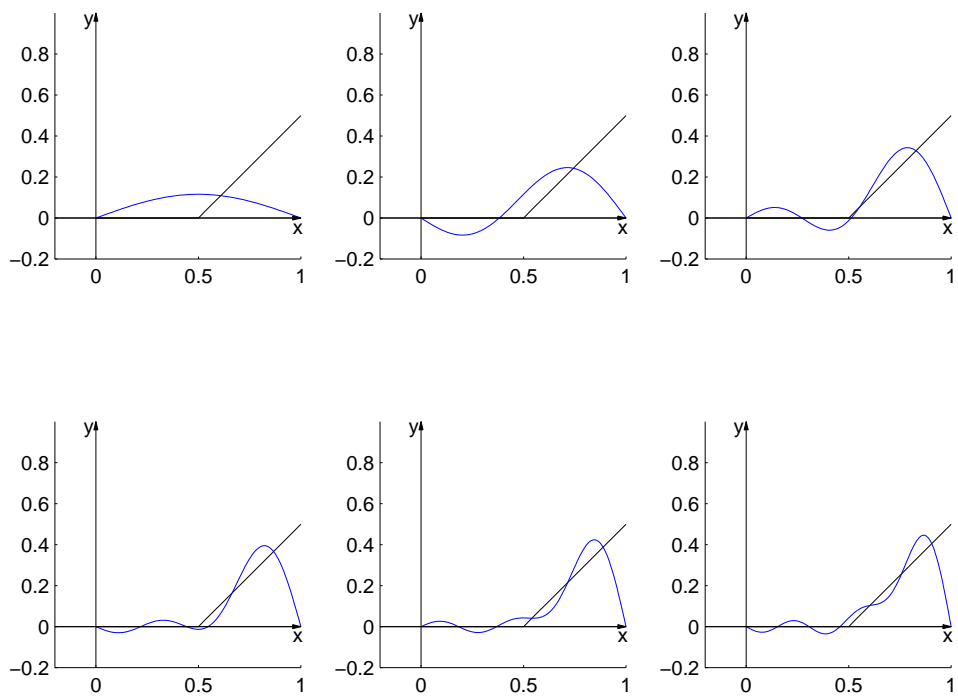


Figura 13: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [1/2, 1]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de senos de f , para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Referências

- [1] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 6a. edition, 1999.
- [2] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [3] Donald Kreider, Donald R. Ostberg, Robert C. Kuller, and Fred W. Perkins. *Introdução à Análise Linear*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972.
- [4] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.
- [5] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2002.