CEFET-RJ
Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Exercícios de Cálculo 3
Curvas Parametrizadas
Lista 2

1) Uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ suave é dita **SIMPLES** quando para todo $t_1 \neq t_2 \in I = (a,b)$ tivermos $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, ((A curva não possui interseções, isto é, possui uma única reta tangente em cada ponto do intervalo I). Diga quais das curvas abaixo são simples:

- a) $\alpha(t) = (sen(3t)cos(t), sen(3t)sen(t))$ onde $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$;
- b) $\alpha(t) = (t^2, t^3 - t)$ onde $I = [\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$;
- c) $\alpha(t) = (2t - \pi sen(t), 2 - \pi cos(t))$ onde $I = [0, 2\pi]$;
- d) $\alpha(t) = (t - \frac{\pi}{2} sen(t), tcos(t), sen(t)cos(t))$ onde $I = [-\pi, \pi]$;
- e) $\alpha(t) = (t, 1, cos(t))$ onde $t \in \mathbb{R}$.

2) Para cada item abaixo, esboce o traço da parametrização dada, (escolha um intervalo I apropriado).

- a) $\alpha(t) = (\sqrt{2}cos(t), \sqrt{2}sen(t), \sqrt{2})$;
- b) $\alpha(t) = (tcos(t), tsen(t))$;
- c) $\alpha(t) = (tcos(t), tsen(t), t)$;
- d) $\alpha(t) = (t, t, e^t)$;
- e) $\alpha(t) = (t + 2, e^{t+2})$;
- f) $\alpha(t) = (t, 1, cos(t))$;
- g)$\alpha(t) = (t - 1, t^2 + 3t + 2)$;
- h)$\alpha(t) = (t, t, \frac{1}{t})$.

3) Escreva as equações paramétricas das curvas abaixo. Tente deduzir, pelas equações paramétricas qual o traço da curva.

a) $\alpha(t) = (\pi cos(2t), \pi sen(2t))$;

b) $\alpha(t) = (1 + cos(e^t), -1 + sen(e^t), 1)$;

c) $\alpha(t) = (\frac{1}{2}sen(t), \frac{1}{2}cos(t))$;

d) $\alpha(t) = (tcos(t), tsen(t), t)$;

e) $\alpha(t) = (t, t^3)$;

f) $\alpha(t) = (t^3, t^3, t^3)$;

g) $\alpha(t) = (2 + cos(t), 1 - 2sen(t))$;

h) $\alpha(t) = (2cos(t), 3sen(t))$;

4) A curva parametrizada $\alpha(t) = (cos(t), 1 + sen(t), \sqrt{2 - 2sen(t)})$ com $I = [0, 2\pi)$ é uma curva que está contida na interseção de duas superfícies bem conhecidas, (trabalhadas em sala). Diga quais são estás superfícies.

5) Para as curvas $\alpha(t) = (t, 1 - t^2)$ e $\beta(t) = (t^2, t^3 - t)$ Determine em qual ponto coincidem, para $I = [2, 2]$. Escreva a equação das retas tangentes à cada curva neste ponto e diga qual o ângulo entre elas. (Cuidado com este ponto na segunda curva! São três retas tangentes).

6) Escreva as equações paramétricas de uma elipse de eixos maior a e eixo menor b.

7) Dada uma parametrização $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e uma função real bijetora $\beta : J \subset \mathbb{R} \to I$ definimos uma **reparametrização** da curva como sendo a aplicação $\alpha \circ \beta : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Note que o traço não se altera quando fazemos reparametrizações. Para as curvas abaixo, encontre uma reparametrização que mude sua orientação e o tempo para percorrer todo o trajeto.

- a) $\alpha(t) = (sen(3t)cos(t), sen(3t)sen(t))$ onde $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$;
- b) $\alpha(t) = (t^2, t^3 - t)$ onde $I = [\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$;
- c) $\alpha(t) = (2t - \pi sen(t), 2 - \pi cos(t))$ onde $I = [0, 2\pi]$;
- d) $\alpha(t) = (t - \frac{\pi}{2} sen(t), tcos(t), sen(t)cos(t))$ onde $I = [-\pi, \pi]$;
- e) $\alpha(t) = (t, 1, cos(t))$ onde $t \in \mathbb{R}$.

8) Determine as equações das duas retas tangentes ao traço da parametrização

$$\alpha(t) = (2t - \pi sen(t), 2 - \pi cos(t)) \quad I = [0, 2\pi]$$

no ponto em que ela se intercepta, determine o ângulo entre elas.

3) Calcule o comprimento das curvas abaixo:

a) $\alpha(t) = 2tcos(t)\vec{i} + 2tsen(t)\vec{j} + \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{t})^3}{3}\vec{k}$ onde $t \in [0, 2\pi]$;

b) $\alpha(t) = e^t cos(t)\vec{i} + e^t sen(t)\vec{j}$ onde $t \in [0, \pi]$;

c) $\alpha(t) = t^2\vec{i} + (sen(t) - tcos(t))\vec{j} + (cos(t) + tsen(t))\vec{k}$ onde $t \in [0, \pi]$;

d) $\alpha(t) = (\sqrt{2}.t, e^t, e^{-t})$ onde $t \in [0, 1]$;