Equação diferencial parcial **(EDP)** é a uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes $(x, y, z, t, \ldots)$ e derivadas parciais de uma função incógnita (variável dependente que queremos determinar) $u \equiv u(x, y, z, t, \ldots)$.

Ordem de uma equação diferencial parcial é a ordem da derivada parcial de maior ordem que surge na equação.

Chama-se **solução** de uma equação diferencial parcial a uma função que verifica identicamente essa equação.

A forma geral de uma **equação diferencial parcial de segunda ordem linear** em duas variáveis independentes *x* e *y* é

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G\ ,$$

onde *A, B, C, D, E, F* e *G* são funções de *x* e *y*. Quando $G(x,y)=0$, a equação é dita homogênea; em caso contrário é não-homogênea.

Se os coeficientes *A, B, C, D, E, F* são constantes reais $G(x,y)=0$, a EDP é dita:

Hiperbólica se $B^2 - 4AC > 0$. Ex. Equação unidimensional da onda $a^2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$.

Parabólica se $B^2 - 4AC = 0$. Ex. Equação do calor $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0, \quad k > 0.$

Elíptica se $B^2 - 4AC < 0$. Ex. Equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad (\nabla^2 u = 0).$

Princípio da Superposição

Se u_1, u_2 ,... u_n são soluções de uma EDP linear e homogênea, então a combinação linear $\mathbf{u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n}$ também é solução dessa equação, onde c_1, c_2, ...c_n são constantes.

Admitiremos que sempre que tivermos um conjunto infinito u_1, u_2,... de soluções de uma equação diferencial parcial linear e homogênea, poderemos obter uma outra solução construindo a série infinita.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Separação de Variáveis

A técnica da Separação de Variáveis reduz uma equação diferencial parcial a várias equações diferenciais ordinárias. Para resolver uma equação diferencial parcial por separação de variáveis, supomos que uma solução pode ser expressa como o produto de duas funções desconhecidas, em que uma delas é função de apenas uma das variáveis independentes e a outra das restantes. A equação resultante escreve-se de modo a que um dos membros dependa apenas de uma das variáveis e o outro das variáveis restantes. Sendo assim cada um dos membros terá de ser uma constante, o que vai permitir determinar as soluções.

Exemplo1 - Resolver $\begin{cases} 7\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \\ u(x,0) = 5e^{-x} \end{cases}$

Solução: Consideramos $u(x,y)=X(x)Y(y) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = X'Y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = XY' \end{cases}$. Então,

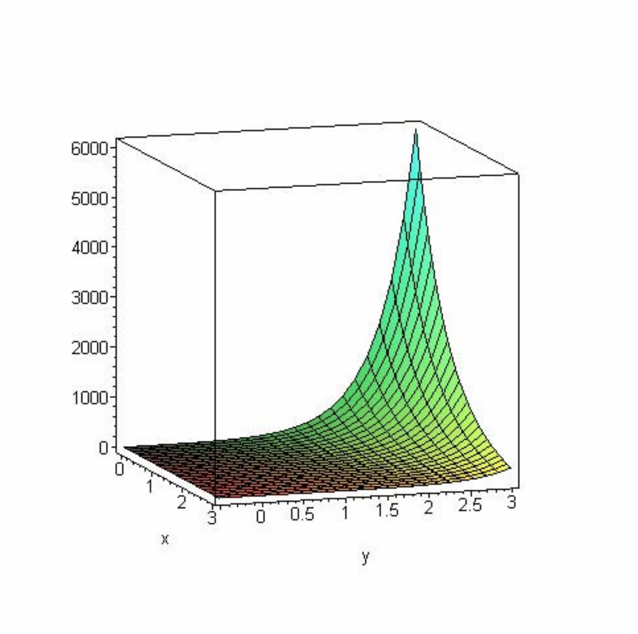
$$7\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+3\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=7X'Y+3XY'=0 \Rightarrow \frac{7X'}{X}=-\frac{3Y'}{Y}=K.$$

Como X é função somente da variável x e Y da variável y, cada termo da última igualdade deve ser constante K, dita constante de separação.

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{7X'}{X}=K \Rightarrow X(x)=C_1 e^{\frac{K}{7}x} \quad \text{e} \quad -\frac{3Y'}{Y}=K \Rightarrow Y(y)=C_2 e^{\frac{-K}{3}y}.$$

Assim, $u(x,y)=X(x)Y(y)=C_1 e^{\frac{K}{7}x} C_2 e^{\frac{-K}{3}y}=C e^{\frac{K}{7}x-\frac{K}{3}y}$.



Aplicando a condição $u(x,0)=5e^{-x}$, obtemos:

$$C e^{\frac{K}{7}x}=5e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} C=5 \\ \dfrac{K}{7}=-1 \Rightarrow K=-7 \end{cases}.$$

A solução procurada é $u(x,y)=5\,e^{-x+\frac{7}{3}y}$.

Exemplo2 - Resolver o problema de condução de calor transiente numa placa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)=2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad t>0, \quad 0<x<3 \\ u(0,t)=u(3,t)=0 \\ u(x,0)=5\,sen(4\pi x)-3\,sen(8\pi x)+2\,sen(10\pi x) \\ u(x,t)<M \end{cases}$$

Solução: Consideramos $u(x,y)=X(x)T(t) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=X'T \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''T \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=Xt' \end{cases}$. Então,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \Rightarrow XT'=2X''T \Rightarrow \frac{T'}{2T}=\frac{X''}{X}=-K^2.$$

O sinal negativo da constante de separação K^2 garante que a solução $T(t)$ decairá com o tempo. Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{T'}{2T} = -K^2 \Rightarrow T' + 2K^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = C \quad e^{-2K^2 t} \qquad ;$$

$$\frac{X''}{X} = -K^2 \Rightarrow X'' + K^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \cos(Kx) + C_2 sen(Kx).$$

Assim, $u(x,y) = X(x)T(t) = C\, e^{-2K^2 t}\left[C_1 \cos(Kx) + C_2 sen(Kx)\right]$e, considerando $A = CC_1, B = CC_2$, escrevemos

$$u(x,t) = e^{-2K^2 t}\left[A\cos(Kx) + Bsen(Kx)\right].$$

Mas aplicando as condições de contorno, obtemos

$u(0,t) = 0 \Rightarrow Ae^{-2K^2 t} = 0 \Rightarrow A = 0$, e para $B \neq 0$

$u(3,t) = 0 \Rightarrow e^{-2K^2 t} Bsen(3K) = 0 \Rightarrow sen(3K) = 0 \Rightarrow 3K = n\pi \Rightarrow K = \dfrac{n\pi}{3}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Assim, $u(x,t) = B e^{\frac{-2n^2\pi^2 t}{9}} sen(\frac{n\pi x}{3})$ é uma solução da equação da equação dada e também o é

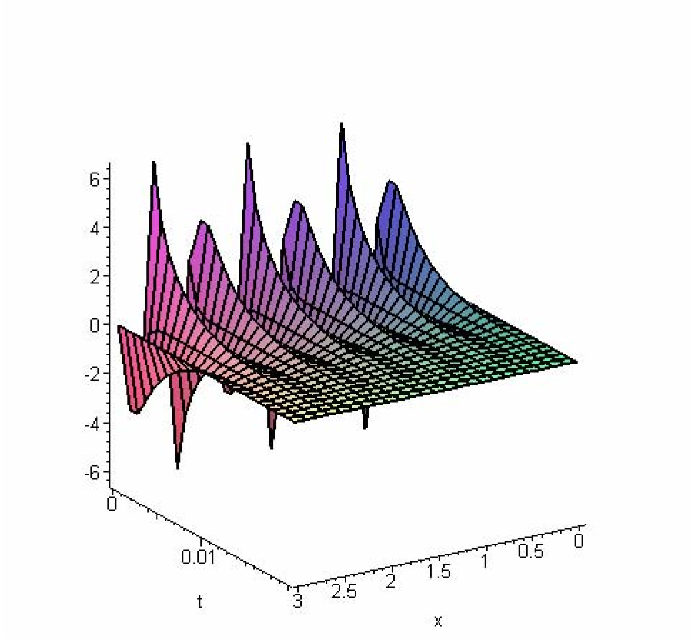
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{-2n^2\pi^2 t}{9}} sen(\frac{n\pi x}{3}).$$

Quando aplicamos agora a condição inicial $u(x,0) = 5sen(4\pi x) - 3sen(8\pi x) + 2sen(10\pi x)$ obtemos $n = 12 \Rightarrow B_{12} = 5, \quad n = 24 \Rightarrow B_{24} = -3$ e $,n = 24 \Rightarrow \quad B_{30} = 2$ e $B_n = 0$ para $n \neq 5, \quad n \neq 24, \quad n \neq 30$.

A solução do problema de condução de calor transiente dado é

$$u(x,y) = 5e^{-32\pi^2 t} sen(4\pi x) - 3e^{-128\pi^2 t} sen(8\pi x) + 2e^{-200\pi^2 t} sen(10\pi x),$$

representada graficamente a seguir



Obs.: Se no exemplo2, a condição inicial fosse substituida por *u(x,0)=f(x)*, teríamos $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sen(\frac{n\pi x}{3})$. Nesse caso os valores de B_n são os conhecidos **coeficientes de Fourier** de *f(x)* (Vide teoria das Séries de Fourier).

Exercícios

1. Utilizando a Separação de Variáveis (*u(x,y)=X(x)Y(y)* ou *u(x,y)=X(x)T(t)*), determinar possíveis soluções de:

a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$

b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = u(x,y)$

c) $x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$

e) $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \quad \alpha > 0$

f) $\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$

g) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$

Respostas:

a) $u(x,y) = A\,e^{K(x+y)}$

b) $u(x,y) = A\,e^{y+K(x-y)}$

c) $u(x,y) = A(xy)^K$

d) A EDP dada não é separável

e) $u(x,t) = e^{-t}\left[e^{\alpha K^2 t}\left[A\cosh(Kx) + B\operatorname{senh}(Kx)\right]\right]$

$u(x,t) = e^{-t}\left[e^{-\alpha K^2 t}\left[C\cos(Kx) + D\,sen(Kx)\right]\right]$

$u(x,t) = (Ex + F)\,e^{-t}$

f) $u(x,t) = \left[A\cosh(Kx) + B\operatorname{senh}(Kx)\right]\left[C\cosh(K\alpha t) + D\operatorname{senh}(K\alpha t)\right]$

$u(x,t) = \left[E\cos(Kx) + F\,sen(Kx)\right]\left[G\cos(K\alpha t) + H\,sen(K\alpha t)\right]$

$u(x,t) = (Ix + J)(Lt + M)$

g) $u(x,y) = \left[A\cosh(Kx) + B\operatorname{senh}(Kx)\right]\left[C\cosh(Ky) + D\operatorname{senh}(Ky)\right]$

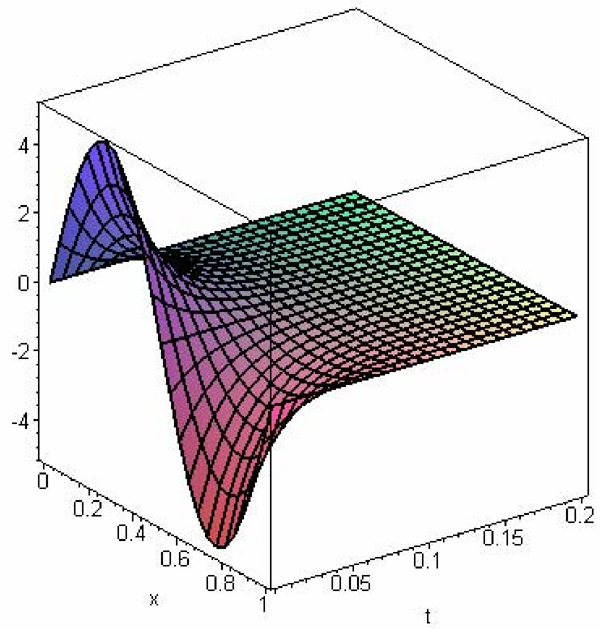
$u(x,y) = \left[E\cos(Kx) + F\,sen(Kx)\right]\left[G\cos(Ky) + H\,sen(Ky)\right]$

$u(x,y) = (Ix + J)(Ly + M)$

2) Resolver a equação da difusão, para
$0 < x < 1, \quad 0 \le t,$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = 5sen(2\pi x) \end{cases}$$

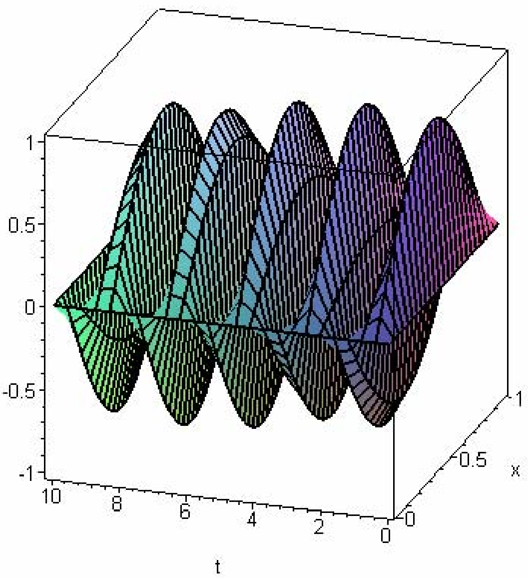
Resposta: $u(x,t) = 5e^{-4\pi^2 t} sen 2\pi x$



3) Resolver a equação da onda, para
$0 < x < 1, \quad 0 \le t,$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = sen(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = sen \pi x \cos \pi t$



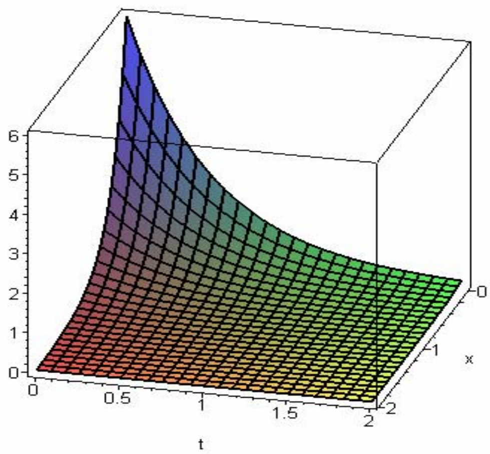
Aplicação da Transformada de Laplace na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

Para resolver equações diferenciais parciais utilizando a técnica da Transformada de Laplace aplicada na variável t, denotando $L\{u(x,t)\}=U(x,s)$, consideramos que

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\}=sU(x,s)-u(x,0)\ ,\quad L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right\}=s^2U(x,s)-su(x,0)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,0),$$

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right\}=\frac{d}{dx}U(x,s)\ \text{e}\ L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t)\right\}=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)$$

Exercícios



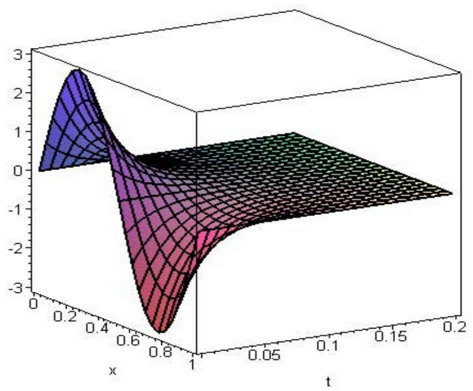
1)Determinar uma solução limitada $u(x,t)$ se $0<x,\quad 0\le t$, para o problema

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+u(x,t)\\ u(x,0)=6e^{-3x}\end{cases}$$

Resposta: $u(x,t)=6e^{-2t-3x}$

2) Resolver a equação da condução do calor, para $0<x<1,\quad 0<t,$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0\\ u(0,t)=u(1,t)=0\\ \\ u(x,0)=3sen(2\pi x)\end{cases}$$

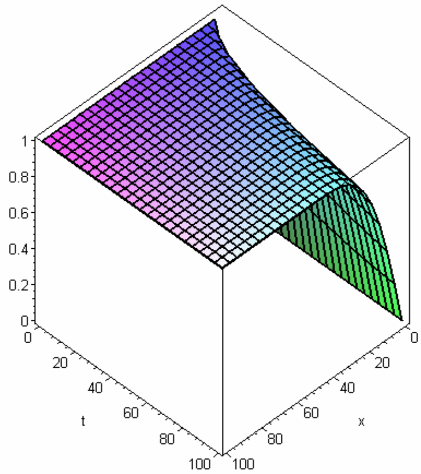


Resposta: $u(x,t)=3e^{-4\pi^2 t}sen2\pi x$

(Representa a temperatura no tempo $t>0$, em qualquer ponto do sólido limitado pelas faces planas infinitas $x=0$ e $x=1$, mantidas à temperatura zero. $u(x,0)=3sen(2\pi x)$ representa a temperatura inicial $para.\ 0<x<1$)

3) Resolver a equação da condução do calor, para $0 < x, \quad 0 < t$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(0,t) = 1 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$



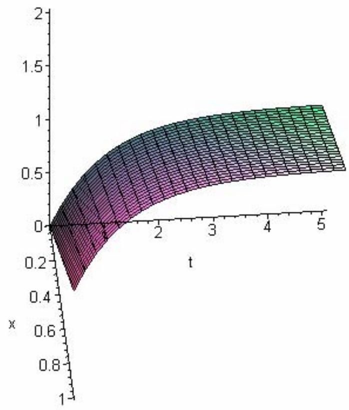
Resposta:

$$u(x,t) = L^{-1}\left\{ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-v^2}\, dv = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right)$$ (Representa a temperatura num ponto qualquer do sólido semi-infinito com temperatuna inicial nula e cuja face $x=0$ e $x=1$ *é* mantida à temperatura unitária.)

4)Determinar uma solução limitada $u(x,t)$ se $0 < x < 1, \quad 0 \le t$, para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 1 - e^{-t} \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = 1 + x - e^{-t}$



Observações

Um corpo é **isotrópico** se a condutividade térmica em cada um de seus pontos é independente da direção do fluxo de calor através do ponto.

Em um corpo isotrópico, a temperatura, $u \equiv u(x,y,z,t)$, é obtida resolvendo-se a **equação diferencial parcial (EDP)**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = cp \frac{\partial u}{\partial t}$$

onde ***k***, ***c*** e ***p*** são funções de *(x,y,z)*, e representam respectivamente, a condutividade térmica, o calor específico e a densidade do corpo no ponto *(x,y,z).*

Quando *k, c* e *p* são constantes, essa equação é denominada **equação simples tridimensional do calor**, e é expressa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{cp}{k} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Se o domínio do problema é relativamente simples, a solução dessa equação é obtida utilizando a série de Fourier. Na maioria das situações onde *k, c* e *p* não são constantes ou quando o domínio é irregular, uma estimativa da solução da equação diferencial parcial deve ser obtida por meio de métodos numéricos.

1.1-Equação Do Potencial ou de Poisson(EDP Elíptica)

Consideremos a **equação de Poisson:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)= f(x,y).$$

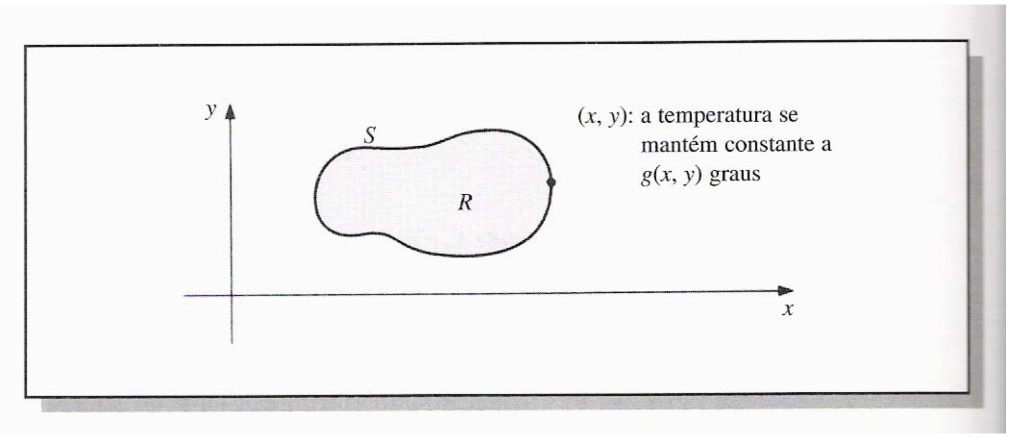
Nessa equação supomos que a função f descreve os dados do problema em uma região plana ***R*** com fronteira **S**. Equações desse tipo aparecem durante o estudo de diversos problemas físicos dependentes do tempo; por exemplo, a distribuição de calor para um estado estável em uma região plana, a energia potencial de um ponto em um plano sobre o qual atuam forças gravitacionais e os problemas bidimensionais do estado de equilíbrio em fluidos .

Para se obter uma solução única para equação de Poisson é necessário impor outras restrições. Por exemplo, o estudo da distribuição de calor no estado de equilíbrio em uma região plana requer que $f(x,y)\equiv 0$ que é a **equação de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0,$$

Se a temperatura na região é determinada por sua distribuição no fronteira da região, as restrições são denominadas **Condições de fronteira de Dirichlet,** dadas por $u(x,y)=g(x,y)$, para todo(x,y) em **S**, a fronteira da região **R** (ver figura 1).

Figura 1



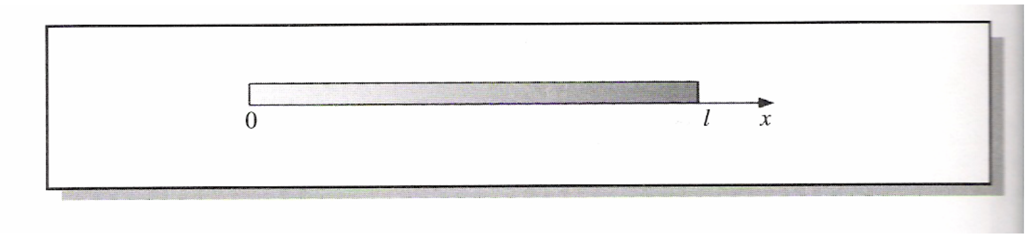
1.2- Equação de Calor ou da Difusão (EDP Parabólica)

A equação do **calor** ou de **difusão (**que é uma equação diferencial parcial parabólica**)**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0,$$

modela matematicamente o problema físico referente ao fluxo de calor ao longo de uma barra de comprimento l (figura 2), a qual tem uma temperatura uniforme dentro de cada elemento transversal. Essa condição requer que a superfície lateral da barra esteja perfeitamente isolada. A constante α é determinada pelas propriedades de condução de calor do material de que a barra é feita e é independente da posição da barra.

Figura2



Um dos conjuntos típicos de restrições para um problema de fluxo de calor desse tipo consiste em especificar a distribuição inicial de calor na barra: ***u(x,0)=f(x)*** e em descrever o comportamento nas extremidades da barra. Por exemplo, se as extremidades são mantidas em temperaturas constantes U_i *e* U_2, as condições de contorno têm a forma:

$$u(0,t)=U_1 \quad \text{e} \quad u(l,t)=U_2,$$

e a distribuição de calor se aproxima da distribuição limite de temperatura

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x.$$

Se, a barra estiver **isolada** de modo que não flua calor por suas extremidades, as condições de contorno serão:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0,$$

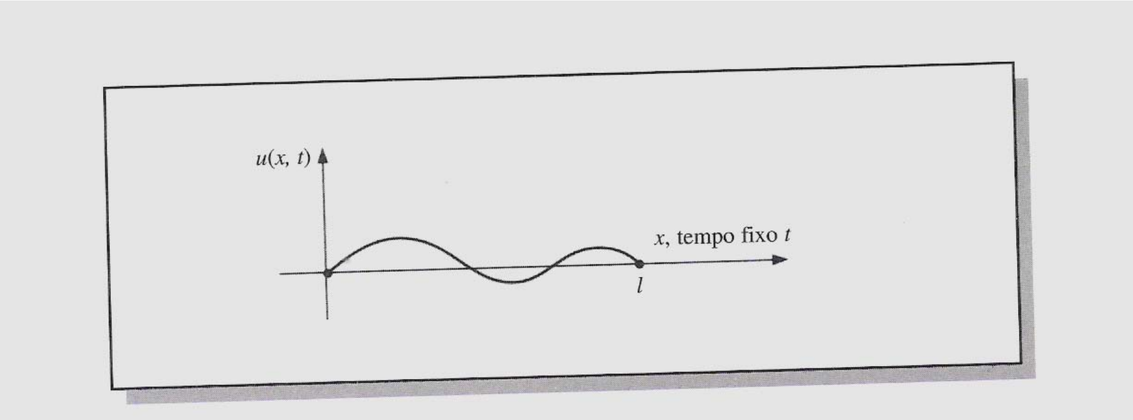
o que resulta em uma temperatura constante na barra como caso limite.

A equação diferencial parcial parabólica também é importante para o estudo da difusão dos gases.

1.3- Equação da Onda (EDP Hiperbólica)

Consideremos a equação da **Onda** unidimensional , um exemplo de uma equação diferencial parcial hiperbólica. Supomos que uma corda elástica ,de comprimento *l* , seja esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal(figura 3)

Figura 3



Se pusermos a corda em movimento de modo que ela vibre em um plano vertical, o deslocamento vertical *u (x , t)* de um ponto *x* no tempo *t* satisfará a equação diferencial parcial

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), para\ 0<x<l,\ 0<t,$$

se os efeitos de amortização forem desconsiderados e a amplitude não for muito grande.

Para impor restrições a esse problema, vamos supor que a posição e a velocidade iniciais da corda sejam dadas por

$$u(x,0)=f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x),$$

Se os pontos extremos forem fixos, teremos:

$$u(0,t)=0 \quad e \quad u(l,t)=0.$$

Os outros problemas físicos envolvendo a equação diferencial parcial hiperbólica ocorrem no estudo de vigas vibrantes com uma ou ambas as extremidades fixas e na transmissão de eletricidade em uma linha de transmissão longa onde exista alguma perda de corrente para o solo.

8.4 – Bibliografia para EDP`s

BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro : LTC, 1992.

BRONSON, Richard. Moderna introdução às equações diferenciais. São Paulo : MacGraw-Hill, 1977.

BUEDEN, Richard L., Faires, J. Douglas. "Analise Numérica", São Paulo, SP, 2003, THOMSON.

KORN, Grandino A, Korn, Thereza M.- Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, New York, 2000, Dover Publications.

KREYSZIG, Erwin. Matemática superior. Rio de Janeiro : LTC, 1969. v.1.

SPIEGEL, Murray R. Transformadas de Laplace. Rio de Janeiro : McGraw-Hill, 1979.

STROUD, K.A, Booth, Dexter J., Advanced Engineering Mathematics, New York, 2003, Palgrave Macmillan.

ZILL, Dennis G., CULLEN, Michael R. Equações diferenciais. São Paulo : Makron Books, 2001. 2 v.