CEFET-RJ
Nova Iguaçu

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
UNIDADE DE NOVA IGUAÇU
Ensino de Graduação
MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 4
O CORPO DOS COMPLEXOS
LISTA 1

1) Prove que no corpo dos complexos são válidas:

- a) $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = (z_1^2 - z_2^2)$;
- b) $(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$;
- c) $z_1 - (+z_2) = z_1 - z_2$;
- d) $z_1 + (+z_2) = z_1 + z_2$;
- e) $z_1 - (-z_2) = z_1 + z_2$;
- f) $z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2$;
- g) $(z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2) = (z_1^3 - z_2^3)$;
- h) A parte real de z é a metade da soma de z com seu conjugado;
- i) A parte imaginária de z corresponde ao quociente da subtração entre z e seu conjugado e o número $2i$;
- j) A soma de z com seu conjugado é o dobro da parte real de z;
- k) O conjugado do conjugado de z é ele mesmo;
- l) O conjugado da soma é a soma dos conjugados;
- m) O conjugado do produto é o produto dos conjugado;
- n) O módulo do quadrado de z é o quadrado do módulo de z;
- o) O produto de z por seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z;
- p) O inverso de z é igual ao quociente do conjugado pelo quadrado do módulo de z;
- q) O módulo do produto é o produto dos módulos;
- r) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

2) Calcule:

- a) $(1 + 2i)^3$;
- b) $\dfrac{5}{2 - 3i}$;
- c) $(\frac{2+i}{3-2i})^2$;
- d) $(1 - i)^n + (1 + i)^n$.

3) Dado $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, determine a parte real e a parte imaginária de:

- a) z^4;
- b) $\dfrac{1}{z}$;
- c) $(\frac{z-1}{z+1})$;
- d) $\dfrac{1}{z^2}$.

4) Calcule e indique no plano comlexo:

- a) $\sqrt[2]{1 + i}$;
- b) $\sqrt{\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}}$;
- c) $\sqrt[4]{-1}$;
- d) $\sqrt[4]{-i}$;
- e) $\sqrt[6]{1}$;
- f) $\sqrt[4]{3}$;
- g) $\sqrt{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}.i}$;
- b) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.

5) Calcule as soluções da equação:

$$z^2 + (\alpha + i\beta)z + (\gamma + i\delta) = 0$$

6) Verifique que os valores de $\dfrac{w}{w^2 + 1}$ para $w = z = a + bi$ e para $w = \bar{z} = a - bi$ são conjugados.

7) Calcule o módulo de

- a) $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$;
- b) $\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

8) Verifique que:

- a) $(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2=4|z|^2$;
- b) $\dfrac{(1+i)}{(1-i)}+\dfrac{(1-i)}{(1+i)}=0$.

9) Determine condições sobre os coeficientes da equação: $az+b\bar{z}+c=0$ com $z\in\mathbb{C}$ para que possua exatamente uma solução. Nesse caso, calcule a solução.

10) Sejam $z=a_bi$, $w=c+di\in\mathbb{C}, w\neq 0$. Mostre que

$$\frac{z}{w}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=0$$

11) Dê um isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e o subespaço do espaço das matrizes 2×2 da forma $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ que preserva a operação de multiplicação.

12) Calcule o argumento de:

$$(i(1+i))^{-1}$$

13) Escreva o número abaixo na forma $a+bi$.

$$z=\left(2^{\frac{1}{9}}\left(cos(\frac{\pi}{12})+isen(\frac{\pi}{12})\right)\right)^{36}$$

14) Encontre um número complexo z tal que $arg(z+i)=\frac{\pi}{4}$ e $|z|=2$.

15) Verifique que se $w\in\mathbb{C}$ é uma raiz $n-$ésima não real da unidade, então

$$1+w+w^2+...+w^{n-1}=0$$

16) Se $w=cos\frac{2\pi}{n}+isen\frac{2\pi}{n}$,$n\in\mathbb{Z}$ verifique que:

$$1+w^k+w^{2k}+...+w^{(n-1)k}=0$$

onde k é um inteiro que não é multiplo de n.

17) Se $f(z)=\dfrac{2z+1}{3z-2}, \frac{2}{3}\neq z$ determine $f(f(z))$.

18) Determine as partes real e imaginária de $f(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$.

19) Seja $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Determine as curvas no plano complexo que são transformadas nas retas $u=a$ e $v=b$ pela aplicação $f(z)=z^2$. Determine também a região obtida com imagem por essa aplicação do quadrado unitário $Q=\{z\in\mathbb{C}; Re(z), Im(Z)\in[0,1]\}$.

20) Mostre que a aplicação $f(z)=ln(z)$ transforma círculos centrados na origem em retas verticais e retas passando pela origem em retas horizontais.

21) Determine a imagem da reta $Im(Z)=0$ pela função $f(z)=\dfrac{1-iz}{1+iz}$ definida para $z\neq i$.

22) Determine a imagem da reta $Re(Z)=0$ pela função $f(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$ definida para $z\neq -i$.

23) Prove que não existe o limite

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$$

.

24) Calcule as derivadas das funções:

- a) $f(z) = (1-4z^2)^3$;
- b) $f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$;

25) Mostre que as funções $f(z) = Re(z), g(z) = Im(z), h(z) = \bar{z}$ não são deriváveis em nenhum ponto de $\mathbb{C}$

26) Escreva as equações de Cauchy-Riemann na forma polar.

27) Mostre que a parte real e a parte imaginária da função $f(z) = (x-y)^2 + 2i(x+y)$ satisfazem as condições de Cauchy-Riemann sobre a curva $x - y = 1$. $f$vé analítica?

28) Se $3x^2y - y^3$ é a parte real de uma função analítica $f(z)$, determine a parte imaginária.

29) Prove que xy^2 não pode ser parte real de uma função analítica.

30) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$ é analítica?

31) Se $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ determine $\frac{df}{dz}$ e diga onde f é analítica.

32) Prove que a função $u(x,y) = e^{-x}(xseny - ycosy)$ é harmônica e determine a sua conjugada harmônica $v(x,y)$ de modo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ seja analítica.

33) Verifique que as partes reais e imaginárias da função $f(z) = ze^{-z}$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.

34) Mostre que a função $f(z) = x^2 + iy^3$ não é analítica em nenhum ponto.

35) Determine quais das funções $u(x,y)$ dadas abaixo são harmônicas. Para as $u(x,y)$ harmônicas ache a conjugada harmônica $v(x,y)$ e expresse $u + iv$ como função analítica de z.

- a) $u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$;
- b) $u(x,y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$;
- c) $u(x,y) = xe^x cosy - ye^x seny$;
- d) $u(x,y) = e^{-xy} sen(x^2 - y^2)$.

36) Para cada uma das seguintes funções, localize e classifique as singularidades no plano $\mathbb{C}$ e diga se são singularidades isoladas ou não:

- a) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$;
- b) $f(z) = \dfrac{ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^4}$;
- c) $f(z) = \dfrac{sen(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$;
- d) $f(z) = esec(\frac{1}{z})$.

37) Prove que a função $u(x,y) = 2x(1-y)$ é harmônica e determine a sua conjugada harmônica $v(x,y)$ de modo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ seja analítica.

38) Use as equações de Cauchy-Riemann para estudar a analiticidade da função $x^2 + iy^3$.

39) Use as equações de Cauchy-Riemann para estudar a analiticidade da função $f(z) = (3y^2 - x^3) + i(6xy^2 - 3yx^2)$.

40) Mostre que as funções $u(x,y) = \dfrac{x(1+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2}$ e $v(x,y) = \dfrac{y}{(1+x)^2+y^2}$ satisfazem as condições de Cauchy-Riemann. Diga se pode existir uma função complexa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica.