CEFET-RJ
Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Cálculo 4 – EMECA – Prova 1

Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: ____

Duração da prova: 2 horas. Data: 14/09/2015

Nota

O aluno deverá desenvolver APENAS QUATRO questões da prova.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada. Onde estiver escrito MOSTRE ou PROVE, você deve mostrar ou provar. Onde estiver escrito calcule, basta calcular.

1. [2.5 pt] Faça:

a) (1,25) Considerando $z = x + iy$ a função complexa:

$$h(z) = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) sen(z) = cos(z)sen(z)$$

Calcule $|h(1+i)|$.

b) (1,25) Mostre que a função complexa $f(z) = \frac{1}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} - 0$, use isto para calcular sua derivada.

2. [2.5pt] Faça:

a) (1,25)Descreva geometricamente a região: $\{z \in \mathbb{C}; \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 2\}$

b) (1,25)Sabendo que $u(x,y) = 3x^2y - y^3$ é a parte real de uma função analítica, determine sua parte imaginária.

3. [2.5 pt] Faça:

a) (1,25) Encontre a série de Maclaurin de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ e determine seu raio de convergência;

b) (1,25) Use os teoremas de derivação, deslocamento uma unidade no índice da série e o item anterior para dizer que função complexa tem como série de potências: $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$.

4. [2.5pt] Escreva $z = x + iy$, use a regra dos dois caminhos para provar que a função $h(z) = \bar{z}$ não é derivável em nenhum ponto.

5. [2.5pt] Calcule:

a) (1,25) Usando parametrizações calcule:

$$\oint_C z\,dz$$

onde C é o caminho dado pelo triângulo de vértices 0, 1 e i orientado no sentido anti-horário.

b) (1,25) Faça $z = x + iy$ e considere a função $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$.

Represente no plano cartesiano os pares (x, y) tais que

$$\frac{Re(f(z))}{Im(f(z))} = \frac{3}{2y}$$

6. [2.5pt] Considere a função $h(z) = (1+i)\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ com $z \neq -1$. Encontre a região do plano complexo, imagem por esta função da região $D = \{cos(\theta) + isen(\theta), \quad -\pi < \theta < \pi\}$.