CEFET-RJ
Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Cálculo 4 – ECA – Prova 3

Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: ______________________________ **Nota**

Duração da prova: 2 horas. Data: 06/06/2016

O aluno deverá desenvolver APENAS o equivalente a 10 pontos da prova.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada. Onde estiver escrito "resolva completamente", todos os passos devem aparecer na solução.

1. [2.5 pt] Considere o conjunto:

$\omega = \{cos(\frac{2\pi x}{T}), cos(\frac{4\pi x}{T}), cos(\frac{6\pi x}{T}), ..., cos(\frac{m\pi x}{T}), ..., sen(\frac{2\pi x}{T}), sen(\frac{4\pi x}{T}), sen(\frac{6\pi x}{T}), ..., sen(\frac{n\pi x}{T}), ...\}$
para $n, m = 1, 2, 3, 4, ...$

Assuma que $< f, g >= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)g(x)dx$ é um produto interno.

Mostre que ω é um conjunto ORTONORMAL.

2. [2.5 pt] Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \quad 0 < x < 2\pi; \\ f(x) = f(x + 2\pi); \end{cases}$$

Sabendo que a série de Fourier da expansão desta função, para $x = 0$, converge para $2\pi^2$, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3. [2.5 pt] Determine a série de Fourier da função:

$$f(x) = \begin{cases} 4, \quad -4 < x \leq -2; \\ -3x - 2 \quad -2 \leq x \leq 0; \\ 3x - 2 \quad 0 \leq x \leq 2; \\ 4, \quad 2 \leq x < 4; \\ f(x) = f(x + 8); \end{cases}$$

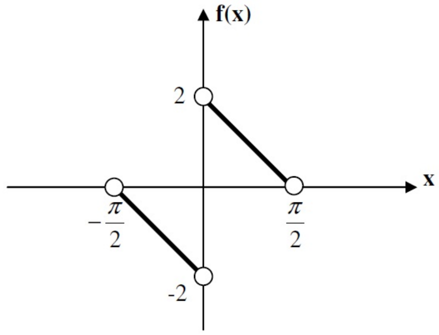
4. [2.5 pt] Resolva o problema abaixo:

$$\begin{cases} 3u_x + 2u_y = 0; \\ u(x, 0) = 4e^{-x}. \end{cases}$$

5. [2.5 pt] Resolva o problema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}u(x, y) = 2\frac{\partial}{\partial y}u(x, y) + u(x, y); \\ u(x, 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}. \end{cases}$$

6. [2.5 pt] Determine a série de Fourier da função $\pi-$periódica:



7. [2.5 pt] Resolva o problema abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t) = t \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}; \\ u(0,t) = t; \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

8. [2.5 pt] Resolva a equação abaixo:

$$(x+2y)u_x + (y-x)u_y = y$$

(Sugestão: Note que $dy + dx = 3du$).

2. [2.5pt] Encontre uma solução para a equação diferencial parcial: $x^2 u_{xy}(x,y) + 3y^2 u(x,y) = 0$ e que satisfaça $u(x,0) = e^{\frac{1}{x}}$.

3. [5.0 pt] Resolva completamente o Problema de valor inicial e condição de fronteira:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \quad t \geq 0; \\ u(x,0) = -3x \quad x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

4. [5.0pt] Considere uma corda elástica de comprimento 30 unidades, presa nas extremidades. Suponha que a posição de cada ponto da corda em cada instante seja dado pela função $u(x,t)$. Suponha que no instante inicial $t = 0$ a corda esteja parada e que a posição de cada ponto da corda seja dado pela função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & 0 \leq x \leq 10; \\ \frac{30-x}{20} & 10 \leq x \leq 30. \end{cases}$$

(Assuma que a constante de proporcionalidade seja $c = 4$).

Escreva o modelo matemático que explica o problema e resolva-o completamente.

Estas informações podem ser úteis:

$u(0,t) = t \Rightarrow \mathtt{L[u(0,t)] = U(0,s)} = \frac{1}{\mathtt{s}^2} = \mathtt{L[t]}$

$\mathtt{L[f(t-a)u_a] = F(s)e^{-as}}$