CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
UNIDADE DE NOVA IGUAÇU
Ensino de Graduação
MATEMÁTICA

CÁLCULO 4 – ECA – PROVA 1

Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: ____

Nota

Duração da prova: 2 horas. Data: 14/09/2015

O aluno deverá desenvolver APENAS QUATRO questões da prova.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada. Onde estiver escrito MOSTRE ou PROVE, você deve mostrar ou provar. Onde estiver escrito calcule, basta calcular.

1. [2.5 pt] Faça:

a) (1,25) Encontre as soluções e faça a representação no plano complexo:

$$z^8 - 1 = 0$$

b) (1,25) Existe função complexa $f(z)$, analítica tal que sua parte real seja $u(x,y) = x^2 + y^2$? Justifique.

2. [2.5pt] Faça:

a) (1,25)Descreva geometricamente a região: $\{z \in \mathbb{C}; \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 2\}$;

b) (1,25)Mostre que a função complexa

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

é analítica em $\mathbb{C} - 0$, use isto para calcular sua derivada.

3. [2.5 pt] Usando o fato de que $2cos(z) = e^{iz} + e^{-iz}$ faça:

a) (1,25) Determine a série de potências de $cos(z)$;

b) (1,25) Usando derivação termo a termo, deduza qual a série de potências de $sen(z)$.

4. [2.5pt] Uma função pode ser derivável em um ponto sem ser analítica naquele ponto. Use a função $h(z) = |z|^2$ e explique esta afirmação.

5. [2.5pt] Faça:

a) (1,0) Calcule

$$\oint_C \frac{1}{z-2}\,dz$$

onde C é o caminho dado por $z = e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$;

b) (1,0) Calcule

$$\oint_C \frac{1}{z-2}\,dz$$

onde C é o caminho dado por $z = 2 + e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$;

c) (0.5) Com base nos dois cálculos anteriores podemos concluir que o teorema de Cauchy é falso? Explique.

6. [2.5pt] Considere a função $h(z) = (1+i)\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ com $z \neq -1$. Encontre a região do plano complexo, imagem por esta função da região $D = \{cos(\theta) + isen(\theta), \quad -\pi < \theta < \pi\}$.