CEFET-RJ
Nova Iguaçu

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
UNIDADE DE NOVA IGUAÇU
Ensino de Graduação
MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 4
EDP'S E SÉRIES DE FOURIER
LISTA 4

1) Obtenha as soluções gerais das EDP's:

a) $u_x(x,y) = 0$;

b) $u_y(x,y) = 0$;

c) $u_{xx}(x,y) = 0$;

d) $u_{xy}(x,y) = 0$;

e) $u_x(x,y) - u_y(x,y) = 0$;

f) $u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y)$;

g) $xu_x(x,y) - yu_y(x,y) = 0$;

h) $\alpha u_{xx}(x,t) - u(x,t) = u_t(x,t)$, $\alpha > 0$;

i) $\alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$;

j) $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$;

2) Resolva os problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} 7\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 3\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = 5e^{-x} \end{cases}$$

3) Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

tem solução $u(x,t) = f(x-ct)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4) Resolva os Problemas de Valor Inicial e Condições de Contorno relativos ao problema de condução de calor:

a) $$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} & , \quad 0 < x < 3 \\ u(x,0) = 5sen(4\pi x) - 3sen(8\pi x) + 2sen(10\pi x) & \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 & \\ u(x,t) < M & \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(x,0) = 5sen(2\pi x) & \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

4) Mostre que no espaço das funções contínuas por partes em $[-L, L]$,

$$< f, g > = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$$

é um produto interno.

5) Mostre que o conjunto $\{1, cos\frac{\pi t}{L}, sen\frac{\pi t}{L}, cos\frac{2\pi t}{L}, sen\frac{2\pi t}{L}, ..., cos\frac{n\pi t}{L}, sen\frac{n\pi t}{L}, ...\}$ é ortogonal.

6) Ache as séries de Fourier de senos e de cossenos das funções dadas:

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ 1, & se \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad \frac{L}{4} \leq x < \frac{3L}{4}, \\ 0, & nos \quad outros \quad casos, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ x, & se \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ L - x, & se \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 \leq x < \frac{L}{4} \\ \frac{L}{4}, & se \quad \frac{L}{4} \leq x < \frac{3L}{4} \\ L - x, & se \quad \frac{3L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$