CEFET-RJ
Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Exercícios de Cálculo 4
Integrais Complexas
Lista 2

1) Calcule:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2it}\,\mathrm{d}t$;

b) $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t \quad com \quad Re(z) > 0$;

2) Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ verifique que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}e^{-int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & se \quad m \neq n \\ 1 & se \quad m = n \end{cases}$$

3) Calcule as integrais

$\int_0^{\pi} e^x cos(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_0^{\pi} e^x sen(x)\,\mathrm{d}x$

Usando a integral: $\int_0^{\pi} e^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t$

4) Calcule $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ onde

a) $f(z) = \dfrac{z+2i}{z}$ e C é o caminho dado pelo semicírculo superior de centro 0 e raio 2;

b) $f(z) = \dfrac{z+2i}{z}$ e C é o caminho dado pelo círculo de centro 0 e raio 2;

c) $f(z) = \pi e^{\pi \bar{z}}$ e C é o contorno do quadrado de vértices $0, 1, 1+i$ e i orientado no sentido anti-horário.

5) Verifique que se f é uma função contínua definida num domínio contendo os círculos C e C_0 de raio $R > 0$ e centros 0 e z_0 respectivamente, então:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_0} f(z - z_0)\,\mathrm{d}z$$

6) Calcule

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0}\,dz$$

onde C é o caminho dado pelo círculo de centro z_0 e raio R orientado no sentido anti-horário.

7) Calcule:

a) $\int_i^{\frac{i}{2}} e^{\pi z}\,\mathrm{d}z$;

b) $\int_0^{\pi+2i} cos\frac{z}{2}\,\mathrm{d}z$;

c) $\int_1^3 (z-2)^3\,\mathrm{d}z$;

8) Aplique o teorema de Cauchy-Goursat para calcular $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ onde C é o círculo unitário e:

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$;

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$;

c) $f(z) = tan(z)$;

9) Verifique que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $cosh(z) = cos(iz)$ e $senh(z) = -isen(iz)$.

10) Verifique que a série de Taylor de $cosh(z)$ em torno de $z_0 = -2\pi i$ é $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z+2\pi i)^{2n}}{(2n)!}$.

11) Verifique que a série de Taylor de $f(z) = e^z$ em torno de $z_0 = 1$ é $\sum_{n=0}^{+\infty} e\frac{(z-1)^n}{n!}$.

12) Verifique que a função $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$ tem sua série de Maclaurin dada por $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1}$ para $|z| < \sqrt{3}$.