CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
UNIDADE DE NOVA IGUAÇU
Ensino de Graduação
MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 3
CAMPOS VETORIAIS - INTEGRAIS DE LINHAS
LISTA 5

1) Represente os campos vetoriais abaixo, (Considere também o "tamanho"do vetor).

a) $F(x,y) = xi - yj$;

b) $F(x,y) = 4yi + 3xj$;

c) $F(x,y) = -xi + yj$;

d) $F(x,y) = \frac{xi-yj}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2) Ache um campo vetorial conservativo partindo da função vetorial dada.

a) $f(x,y) = 2x^4 5x^2y^2 + 4y^4$;

b) $f(x,y) = tang^{-1}(x^2y)$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

d) $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

3) Para cada campo a seguir, diga se é conservativo e encontre a função potencial conforme o caso.

a) $f(x,y) = e^x sen(y)i + e^x cos(y)j$;

b) $f(x,y) = (2xy^2 - y^3)i + (2x^2y - 3xy^2 + 2)j$;

c) $f(x,y,z) = yzi + xzj + xyk$;

b) $f(x,y,z) = (ze^x + e^y)i + (xe^y - e^z)j + (-ye^z + e^x)k$.

5) Prove que os campos escalares a seguir são harmônicos.

a) $f(x,y) = e^y sen(x) + e^x cos(y)$;

b) $f(x,y) = ln(\sqrt{x^2+y^2})$;

c) $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - 5z^2$;

b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

6) Calcule as integrais de linha abaixo:

a) $\int_C F(x,y).dR \quad F(x,y) = yi + xj; R(t) = ti + t^2j, 0 \le t \le 1$;

b) $\int_C F(x,y).dR \quad F(x,y) = (x-y)i + (y+x)j$; C é a circunferência $x^2+y^2=4$. Faça partindo do ponto (2,0) até o (-2,0) primeiro no sentido anti-horário, depois no sentido horário e finalmente faça a integral sobre, uma vez a circunferência no sentido anti-horário;

c) $\int_C F(x,y).dR \quad F(x,y) = (ysenx)i - (cosx)j$; C é o segmento da reta ligando $(\frac{\pi}{2}, 0)$ a $(\pi, 1)$;

7) Calcule as integrais de linha abaixo:

a) $\oint_C F(x,y).dR \quad F(x,y) = (2x - y + 4)i + (5x + 3y - 6)j$; onde C é a curva: i) O contorno do triângulo ligando $(0,0),(3,0)e(3,2)$; ii) $R(t) = ti + t^2j, 0 \le t \le 1$; iii) A circunferência de raio 4 e centro (0,0).

8) Verifique que o campo de vectores

$$F(x,y) = (y + 2xe^y)i + (x - 2y + x^2e^y)j$$

é conservativo e determine sua função potencial. Ache o valor do trabalho realizado pelo campo F no deslocamento de uma partícula entre os pontos $(1,1)$ e $(2,4)$.

9) Calcule as integrais de linha:

a) $\int_C (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$ onde C é a curva: $R(t) = sen(t)i + arcsen(t)j$, entre os pontos (1,0) e (0,1).

10) Calcule as integrais de linha:

a) $\int_C zdx + xdy + ydz$ onde C é a hélice $x(t) = acos(t), y(t) = asen(t)$ e $z(t) = bt$ para $t \in [0, 2\pi]$.

11) Calcule as integrais de linha:

a) $\oint_{ABCA} xdx + zdy + ydz$ onde $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1)$.

12) Use a definição de integral de linha dada por $\int_C f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt$ para calcular a integral de linha onde $f(x,y,z) = x + 3y^2 + z$ e C é o segmento de reta ligando os pontos $P = (0,0,0)$ a $Q = (1,1,1)$. (Resp. $2\sqrt{3}$)

13) Sendo $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e C a hélice dada por $\alpha(t) = (sen(t), cos(t), t)$, calcule $\int_C f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt$ para $t \in [0, 2\pi]$. (Resp. $\sqrt{2}(2\pi + \frac{8\pi^3}{3})$)

14) Sendo $f(x,y) = xy$ e C o triângulo dado pela fronteira do conjunto $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1e0 \leq y \leq x\}$, calcule $\int_C f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt$. (Resp. $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})$)

15) Calcule a área de uma película que é obtida levantando-se a função $f(x,y) = x$ sobre o caminho $\alpha(t) = (t, t^2)$ para $t \in [0,2]$; (Resp. $\frac{1}{12}(17\sqrt{17} - 1)$)

16) Lembrando que o comprimento de uma curva α é dado por $\int_C 1.||\alpha'(t)||dt$, isto é $f(x,y) = 1$, calcule o comprimento do cardioide dado por $r(\theta) = 1 + cos(\theta)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ e a uma constante positiva. Dica: Verifique que uma parametrização para o cardioide é $r(t) = (a(1 + cos(t))cos(t), a(1 + cos(t))sen(t))$. (Resp. $8a$).

17) Calcule a integral $\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$ onde C é o segmento de reta que liga os pontos de $A(1,1,1)$ até $B(1,2,4)$. (Resp. 7)

18) Lembrando que o teorema fundamental das integrais de linha diz que $\int_C \nabla f.ds = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$ (onde $C = \alpha([a,b])$), calcule $\int_C \nabla f.ds$ onde $f(x,y) = x^2cos(y)$ e C é o caminho imagem da parametrização $\alpha(t) = (e^{t-1}, sen(\frac{\pi}{t}))$. (Resp. e^2cos1)

19) Calcule o trabalho realizado pelo campo $F(x,y,z) = (x^3, y, z)$ para mover uma partícula uma vez ao longo da circunferência com centro na origem e raio 2, no plano xy.

20) Para o campo vetorial $F(x,y) = xe_1 + xye_2$ verifique que sua integral de linha sobre qualquer circunferência de centro na origem é zero, porém não possui função potencial, isto é, não é conservativo.

21) Para o campo $F(x,y) = (2(x^2 + y^2), (x + y)^2)$ calcule a integral de linha sobre o triângulo cujos vértices são $A(1,1)$, $B(2,2)$ e$C(1,3)$ usando primeiro as parametrizações diretamente e depois usando o teorema de Grenn.

22) Calcule $\oint (2x - y + 4)dx + (5x + 3y - 6)dy$ onde C é a circunferência de centro zero e raio 4.