CEFET-RJ
Nova Iguaçu

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
UNIDADE DE NOVA IGUAÇU
Ensino de Graduação
MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 3
CURVAS PARAMETRIZADAS, DERIVADAS PARCIAIS, GRADIENTE, PLANO TANGENTE
LISTA 3

01) Esboce o gráfico das imagens das funções abaixo:

a) $F(t) = (1, t)$;

b) $F(t) = (t, t+1)$;

c) $F(t) = (2t-1, t+2)$;

d) $F(t) = (t, t^3)$;

e) $F(t) = (t^2, t)$;

f) $F(t) = (t^2, t^4)$;

g) $F(t) = (cos(t), sen(t))$;

h) $F(t) = (t, t, t)$;

i) $F(t) = (cos(t), sen(t), 1)$;

j) $F(t) = (cos(t), sen(t), 2t)$;

k) $F(t) = (1, t, 1)$;

l) $F(t) = (1, 1, t)$;

m) $F(t) = (t, t, 1)$;

n) $F(t) = (1, 0, t)$;

o) $F(t) = (t, cos(t), sen(t))$.

02) Calcule:

a) $\lim_{t \to 0} F(t)$, onde $F(t) = (\frac{\tan(3t)}{t}, \frac{e^{2t}-1}{t}, t^3)$; $[Resp.(3, 2, 0)]$

b) $\lim_{t \to 1} F(t)$, onde $F(t) = (\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \frac{t-1}{t})$. $[Resp.(\frac{1}{2}, 1, 0)]$

03) Para as funções abaixo calcule: $\frac{dF}{dt}$ e $\frac{d^2F}{dt^2}$:

a) $F(t) = (3t^2, e^{-t}, ln(t^2+1))$;

b) $F(t) = (\sqrt{3}t^2, cos(t^2), 3t)$;

c) $F(t) = (sen(5t), cos(4t), -e^{-2t})$;

d) $F(t) = ((2t^3+1)^2 + 5e^{\frac{t^2}{2}}), cos(t), sen(t))$.

04) Determine a equação da reta tangente à trajetória da função dada, no ponto dado.

a) $F(t) = (cos(t), sen(t), t)$ e $F(\frac{\pi}{3})$; $[Resp.(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}) + t(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1), t \in \mathbb{R}]$

b) $F(t) = (t^2, t)$ e $F(1)$; $[Resp.(x, y) = (1, 1) + t(2, 1), t \in \mathbb{R}]$

c) $F(t) = (\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^2)$ e $F(2)$; $[Resp.(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4) + t(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, 4), t \in \mathbb{R}]$

d) $F(t) = (t, t^2, t, t^2)$ e $F(1)$. $[Resp.(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1) + t(1, 2, 1, 2), t \in \mathbb{R}]$

05) Calcule as derivadas parciais pedidas abaixo:

a) $F(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4, \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;

b) $z = cos(xy) \qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

c) $z = \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

d) $F(x,y) = e^{-x^2-y^2}, \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;

e) $F(x,y,z) = x^2 ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1), \qquad \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \qquad \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$;

f) $F(x,y) = xye^{-xy}, \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \qquad \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \qquad \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$;

g) $F(x,y,z) = (x^2y^2z^2) ln(x^2y^2z^2), \qquad \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \qquad \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} \qquad \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x}$
$\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} \qquad \dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z}$;

h) $F(x,y) = e^{cos(e^{xy} sen(ln(x^2y)))}, \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

06) Encontre a equação do plano tangente à superfície dada pela expressão: $z = yln(x)$ no ponto $(1,4,0)$.[Resposta: $z = 4x - 4$];

07) Encontre a equação do plano tangente à superfície dada pela expressão: $z = 4x^2 - y^2 + 2y$ no ponto $(-1,2,4)$;

08) Encontre a equação do plano tangente à superfície dada pela expressão: $z = ycos(x-y)$ no ponto $(2,2,2)$;

09) Calcule a derivada direcional de cada função f abaixo no ponto $p = (a,b)$ dado na direção do vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Usando limites:

a) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$, $P_0(2,1)$, $\vec{v} = (3,-4)$;

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P_0(1,1)$, em um vetor com direção de $45°$ com o eixo x;

c) $f(x,y) = x^2 - 2x^2y + xy^2 - 1$, $P_0(1,2)$, na direção do vetor $\vec{v} = 4i + 6j$;

d) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z$, $P_0(2,2,1)$, $\vec{v} = (3,4,12)$;

Usando qualquer método:

a) $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4y - x + 20$, $P_0(2,1)$, $\vec{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$;

b) $f(x,y,z) = e^{x+y}cos(z) + e^{z-x}sen(y)$, $P_0(0,0,0)$, $\vec{v} = (1,-1,2)$;

c) $f(x,y) = sen(2x)cos(2y)$, $P_0(\frac{\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6})$, $\vec{v} = (1,-1)$;

d) $f(x,y,z) = ln(1 + x^2 - y^2 + z^2)$, $P_0(-1,1,1)$, $\vec{v} = (1,2,-5)$

10) Para as seguintes funções, encontre a direção de maior crescimento da função a partir do ponto indicado. Determine a derivada da função nessa direção.

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$, $P_0(1,2)$;

b) $f(x,y) = xe^y - ye^{2x}$, $P_0(0,0)$;

c) $f(x,y,z) = ln(xy) - 3ln(xz) + ln(yz)$, $P_0(1,1,1)$;

d) $f(x,y) = xy^2 - e^y cos(x)$, $P_0(0,1)$;

e) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4arctg(xy)$, $P_0(1,1)$;

b) $f(x,y,z) = xyz - x^2 + y^2 - z^2$, $P_0(1,1,-1)$.

11) Calcule a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2 - y^2$ na direção tangente â curva $\alpha(t) = (2cos(t), sen(t))$, quando $t = \frac{\pi}{4}$, no ponto $\alpha(\frac{\pi}{4})$.

12) Represente graficamente o campo de vetores e as curvas de nível correspondente a função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 9$.

13) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ quando

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

$(resp. \dfrac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(y^2+2yz)}{(z^2+2xy)})$ e $(\dfrac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(y^2+2xz)}{(z^2+2xy)})$

14) Ache os extremos de $f(x,y) = xy$, restrita a curva $4x^2 + y^2 = 4$.

$(possivelresposta : Max.(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}))$ e $(Min.(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}))$

15) Encontre os extremos da função $f(x,y) = e^{-xy}$ considerando apenas a região do domínio dada pela desigualdade: $x^2 + 4y^2 \leq 1$. Use Lagrange para avaliar sobre a fronteira da região.

16) Estude os extremos das funções:

a) $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{2y^3}{3} - 3x^2 + 10y^2 + 8x + 42y + 2$, $PC.P_0 = (4,7), P_1 = (4,3), P_2 = (2,7), P_3 = (2,3)$;

b) $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 4y + 2z - 5$, $PC.P_0 = (0,2,1)$

c) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} + 1$, $PC.P_1(0,0)min., P_2(0,6)eP_3(4,0)sela, P_4(4,6)max$;

d) $f(x,y) = sen(x) + sen(y + \frac{\pi}{2})$, $PC.P_1(\frac{\pi}{2}, 0)max.$

17) Uma empresa de entregas aceita caixas de no máxima $240cm$ como soma total das três arestas básicas. Encontre o volume máximo que se pode encaixotar para ser entregue por essa empresa.

18) Uma caixa de volume $1litro$ deve ser obtida se modo que sua área lateral seja mínima. Calcule as dimensões da caixa e justifique seus cálculos.

19) Uma loja de roupas vende dois tipos de suéteres semelhantes, porém de diferentes fabricantes. O primeiro tipo custa $R.40,00$ para a loja, enquanto que o segundo tipo custa $R.50,00$. A experiência mostra que se x e y forem os preços de venda do primeiro e do segundo tipo, respectivamente, então a quantidade vendida do primeiro tipo, por semana, será de $3.200 - 50x + 25y$, enquanto que $400 - 25y + 25x$ será a venda do segundo tipo.

a) Qual o lucro bruto na venda de um suéter do primeiro tipo e do segundo tipo?

b) Qual o lucro bruto $L(x,y)$ semanal na venda dos dois suéteres?

c) Qual é o lucro bruto semanal se os suéteres forem vendidos por $R.90,00$ e $R.100,00$, respectivamente?

d) Qual é o lucro bruto semanal se os suéteres forem vendidos por $R.100,00$ e $R.90,00$, respectivamente?

e) A que preços o lucro será máximo?

f) Quando o lucro for máximo, qual a quantidade de suéteres vendida?

20) Para o projeto de uma calha, tem-se uma folha de $12cm$ de largura, a qual deseja-se dobrar de forma a ter uma capacidade máxima. Na folha será dobrado em ambos os lados uma medida x formando um ângulo θ com a horizontal, (formando um trapézio invertido). Quais as medidas de x e θ que maximizam a capacidade da calha?

21) A temperatura T de uma placa circular aquecida, em qualquer dos seus pontos (x, y) é dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{x^2 + y^2 + 2}$$

estando a origem no centro da placa. No ponto $P_0 = (2, -1)$ determine:

(a) A taxa de variação de T na direção $\theta = \frac{\pi}{3}$;

(b) $\nabla T(2, -1)$.

22) A temperatura de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = e^{\frac{x}{2}} cos(\frac{\pi y}{3})$. A partir do ponto $(0, 1)$, determine:

(a) o gradiente da temperatura;

(b) a direção em que a temperatura cresce o mais rápido possível, assim como essa taxa;

(c) a direção em que a temperatura decresce o mais rápido possível, assim como essa taxa;

(d) a direção em que a temperatura não varia;

23) A temperatura do ar em pontos do espaço é dada pela função $f(x, y, z) = 28 + x^2 - y^2 + z^2$. Uma abelhinha se encontra na posição $(1, 2, 1)$ e deseja esfriar-se o mais rápido possível. Em que direção ela deve voar?