CEFET-RJ Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Cálculo 3 – EPRO – Prova 3

Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: ______________________________ **Nota**

Duração da prova: 2 horas. Data: 24/11/2016

O aluno deverá desenvolverAPENAS DEZ pontos da prova, isto é, a soma de todas as questões resolvidas NÃO PODE ultrapassar dez pontos.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada.

1. [2 pt] Calcule o valor da integral de linha

$$\int_C F(x,y)\mathrm{d}\alpha$$

Onde $F(x,y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - sen(y))$ ao longo da curva C, caminho dado por: arco da circunferência $x^2+y^2 = 1$ no 1º e 2º quadrante, segmento de reta ligando os pontos $(-2,0)$ a $(-1,0)$ e o segmento ligando os pontos $(1,0)$ a $(2,0)$, sendo o caminho percorrida no sentido anti-horário.

2. [2 pt] Calcule a integral de linha:

$$\int_C xy\mathrm{d}x + \sqrt{(y)^3}\mathrm{d}y$$

onde C é o caminho formado pelo quadrado resultante de se ligar os pontos:

$P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,2)$,$P_3 = (2,0)$ e $P_4 = (2,2)$, sentido anti-horário.

3. [2pt] **USANDO INTEGRAIS DE LINHA** calcule o valor da área que é externa a elípse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e interna a elípse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4. [2pt] Calcule a integral

$$\oint_C F(x,y)\mathrm{d}R$$

onde C é uma curva fechada de classe C^1 qualquer, que envolve a origem, orientada no sentido anti horário e

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

5. [2pt] Determine uma função $u(y)$ de modo que a integral

$$\int (1+y^2)u(y)\mathrm{d}x + (x+y^2-1)u(y)\mathrm{d}y$$

seja independente do caminho.

6. [2pt] Calcule qual o valor do trabalho **TOTAL** realizado pelo campo $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ para mover uma partícula do ponto $(1,0)$ até o ponto $(2,1)$ ao longo da parábola $y = (x-1)^2$.

7. [2pt] Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1. O rotacional de F é definido como:

$$rot(F) = \nabla \times F = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]\vec{k}$$

Um resultado bem conhecido é que: "*Se $rot(F) = \vec{0}$ então o campo é conservativo*". Isso nos diz que existe uma função potencial $f(x, y, z) = M(x, y, z) + N(x, y, z) + L(x, y, z) + C$ tal que $\nabla f(x, y, z) = F(x, y, z)$. Para calcular M, N, L fazemos:

$$M(x, y, z) = \int F_1 \mathrm{d}x$$

$$N(x, y, z) = \int F_2 - \frac{\partial M}{\partial y} \mathrm{d}y$$

$$L(x, y, z) = \int F_3 - \frac{\partial (M + N)}{\partial z} \mathrm{d}z$$

Mostre que o campo $F(x, y, z) = (ycos(xy), xcos(xy) + 2yz^3, 3y^2z^2)$ é conservativo e calcule sua função potencial.