CEFET-RJ
Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Exercícios de Cálculo 1
Estruturas Algébricas, Anéis e Corpos Relação de ordem em $\mathbb{R}$
Lista 1

1) Verifique quais dos itens abaixo refere-se a operações binárias fechadas no respectivo conjunto.

a) $a * b = a + b - 5$ no conjunto $\mathbb{Z}$;

b) $a * b = Max(a, b)$ no conjunto $\mathbb{Z}$;

c) $a * b = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ no conjunto dos *Pares*;

d) $a * b = \dfrac{2a + 4b}{2}$ no conjunto $\mathbb{Z}$;

e) $a * b = a + b - \sqrt{2}$ no conjunto $\mathbb{I}$;

f) $a * b = ab - a - b + 2$ no conjunto $\mathbb{N}$;

g) $a * b = \frac{ab}{2}$ no conjunto $\{2, -2, 2i, -2i\}$;

h) $a * b = 2^{ab}$ no conjunto $\mathbb{Z}$;

i) $a * b = 2^{ab}$ no conjunto $\mathbb{Q}$.

2) Considere cada item do exemplo anterior definida no conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$. Diga que propriedades cada operação possui. (Associatividade, comutatividade, elemento neutro, elemento simétrico).

3) Verifique que $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_{11}$ possuem a propriedade do inverso multiplicativo. (De fato, $\mathbb{Z}_p$ para qualquer p primo é um corpo).

4) No corpo dos reais prove que:
$a + c = b$ se e somente se $a = b - c$ (Pode passar pro outro lado trocando o sinal.)

5) No corpo dos reais prove que:
$a = b$ se e somente se $a + c = b + c$ (Pode simplificar elementos iguais dos dois lados.)

6) No corpo dos reais prove que para $c \neq 0$:
$ac = b$ se e somente se $a = \frac{b}{c}$ (Se não for zero pode passar dividindo.)

7) No corpo dos reais prove que para $c \neq 0$:
$ac = bc$ se e somente se $a = b$ (Se não for zero pode simplificar.)

8) No corpo dos reais prove que para $b \neq 0$ e $d \neq 0$ vale:
$\dfrac{ad + bc}{bd} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ (Para somar frações tiramos o MMC).

9) No corpo dos reais prove que para $b \neq 0$ e $d \neq 0$ vale:
$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$ (Dividir frações é multiplicar pela de baixo invertida).

10) No corpo dos reais prove que:
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

11) No corpo dos reais prove que:
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

12) No corpo dos reais prove que:
$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

13) Resolva em $\mathbb{R}$ indicando as propriedades usadas:

a) $3x^2 - 2x = 0$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

14) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{(ab)^{-1}} =$

b) $\left(\dfrac{\dfrac{2a}{b-c}}{\dfrac{4a}{b-c}} \right)^2 =$

c) $2\sqrt{8} - 4\sqrt{18} + \sqrt{32} =$

d) $\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{3} =$

e) $\left(x\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{x}{y}} \right)^2 =$

15) Para as expressões abaixo diga quais são verdadeiras e quais são falsas.

a) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$;

b) $\sqrt[3]{pq} = \sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}$;

c) $\sqrt{p^2 + q^2} = p + q$;

d) $\dfrac{1 + pq}{q} = 1 + p$;

e) $\dfrac{1}{p+q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$;

f) $\dfrac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \dfrac{pq}{p+q}$.

16) Complete quadrados:

a) $x^2 - 4x + 1 = 0$.

b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$.

b) $x^2 - 16x - 11 = 0$.

17) Represente em uma reta real os conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x < 2\} \cap \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 3\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x\} \cup \{x \in \mathbb{R}; 0 < x \leq 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x < 4\}$.

18) Mostre que em $\mathbb{R}$, para $b, d > 0$ vale:
Se $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d}$ então $ad \leq bc$.

19) Represente em uma reta a solução das inequações:

a) $2x > x + 1$;

b) $2x - 18 \geq 4x - 38$;

c) $x(x-3) > 0$;

d) $x^2 - x \geq 6$;

20) Represente em uma reta a solução das inequações:

a) $(x-1)(x+2)(x-4) > 0$;

b) $(x+3)(x-2)(x+1) > 0 \leq 0$;