CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
UNIDADE DE NOVA IGUAÇU
Ensino de Graduação
MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR – EPRO – PROVA 1
Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: ______________________________ **Nota**

Duração da prova: 2 horas. Data: 15/04/2015

O aluno deverá desenvolverAPENAS DEZ pontos da prova, isto é, a soma de todas as questões resolvidas NÃO PODE ultrapassar dez pontos.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada.

Nas questões de 01 a 04, o aluno deve, dada a pergunta, escolher qual das três respostas é a mais coerente como resposta e após feito isso, escolher dentre as duas justificativas, qual é a mais coerente.

MARQUE NESTA FOLHA

1) (1,0) Seja E um espaço vetorial e S um subespaço vetorial de E. É correto afirmar que:

a) $E \subset S$ pois:

- (i) Qualquer combinação de elementos de S está em E;
- (ii) A operação de E é a mesma de S e é fechada.

b) $\alpha u + \beta v \in S$ quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e quaisquer que sejam $u, v \in E$, pois:

- (i) Como S é subespaço de E, S está contido em E;
- (ii) É verdade, basta fazer $\alpha = \beta = 0$;

c) $0 \in E$ e $0 \in S$ pois:

- (i) Para todo $\alpha, \beta \in R$ e $u, v \in S$, temos $\alpha u + \beta v \in S$ basta fazer $\alpha = -\beta v$;
- (ii) E é espaço vetorial portanto contém o zero, S também é espaço vetorial portanto também contém o zero;

2) (1,0) Em relação a duas retas no espaço R^3 tais que o produto interno do vetor diretor de uma com o vetor diretor de outra é zero, é correto afirmar que:

a) As duas retas no espaço necessariamente estão no mesmo plano,

- (i) Elas são a mesmo reta, isto é, são coincidentes, uma sobre a outra;
- (ii) O produto vetorial destes dois vetores resulta no vetor nulo;

b) Seus vetores diretores são perpendiculares pois:

- (i) $< u, v >= |u||v|cos\theta$ como o vetor diretor de uma reta nunca é nulo, $cos(\theta) = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$;
- (ii) O produto interno de dois vetores resulta em um terceiro vetor que é perpendicular ao plano que contém os outros dois.

c) Elas são necessariamente retas reversas, isto é, são perpendiculares mas em planos distintos pois:

- (i) O produto vetorial destes dois vetores resulta no vetor nulo.
- (ii) (i) $< u, v >= |u||v|cos\theta$ como o vetor diretor de uma reta nunca é nulo, $cos(\theta) = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$;

3) (1,0) Se S é um subespaço do $\mathbb{R}^5$ gerado por 4 vetores, sobre S é correto afirmar que: (Vamos usar o símbolo $\cong$ para dizer que o conjunto se identifica com...)

a) $S \cong \mathbb{R}^4$ pois:

- (i) 4 vetores geram o $\mathbb{R}^4$;
- (ii) O $\mathbb{R}^4$ é subespaço do $\mathbb{R}^5$;

b) $S \cong \mathbb{R}$, $S \cong \mathbb{R}^2$, $S \cong \mathbb{R}^3$ ou $S \cong \mathbb{R}^4$ pois:

- (i) No conjunto dos quatros vetores podemos ter um vetor LI, dois vetores LI, três vetores LI ou quatro vetores LI.
- (ii) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$;

c) $S \cong \mathbb{R}^4$, ou $S \cong \mathbb{R}^5$ pois:

- (i) A dimensão máxima que podemos conseguir com estes quatro vetores é quatro;
- (ii) No conjunto dos quatros vetores podemos ter um vetor LI, dois vetores LI, três vetores LI ou quatro vetores LI.

4) (1,0) Seja $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ um conjunto com n vetores LI's e $\gamma = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ um conjunto com m vetores. Suponhamos que tanto β quanto γ gerem o espaço S. É correto afirmar que:

a) $m = n$ pois:

- (i) Qualquer conjunto de geradores de S possuem mesma quantidade de vetores;
- (ii) Como β é LI, γ também é LI;

b) $n \geq m$

- (i) Como β é LI, é o "maior"conjunto que gera S;
- (ii) Como β gera S e γ também gera S, $\gamma \subset \beta$;

c) $\beta \cup \gamma$ gera S pois:

- (i) Qualquer conjunto de geradores, quando unidos com elementos do conjunto gerado continuam gerando o mesmo conjunto;
- (ii) Um conjunto LI unido com um conjunto qualquer continua LI;

5) (2,0) Escreva a equação do plano que passa pelos pontos:

$$p_1 = (1, -2, 3), \quad p_2 = (3, 1, 1), \quad e \quad p_3 = (2, 0, -3),$$

6) (2,0) Abaixo é dado um plano e uma reta fora deste plano. Determine a distância entre o plano e a reta.

$\pi(s,t) = s\vec{u} + t\vec{v}$ onde $u = (1, 0, 1)$ e $v = (2, 1, 0)$; $r(t) = t(3, 1, 1) + (1, 1, 1)$;

7) (2,0) Dê uma base formada por vetores unitários para o subespaço vetorial gerado pelos vetores:

$$p_1 = (0, -1, 1), \quad p_2 = (2, 2, 1), \quad p_2 = (3, -1, 4), \quad e \quad p_3 = (5, 0, 6),$$

8) (2,0) Com relação as duas retas a seguir, diga se são reversas, paralelas ou concorrentes e em caso de serem concorrentes, determine o ângulo entre elas.

$r(t) = t(1, 1, 1) + (-3, 0, 2)$;

$s(t) = t(-2, 0, 2) + (2, 1, 0)$;

9) (2,0) Considere o subespaço vetorial V gerado pelos vetores $p_1 = (1, -1, 3)$, $p_2 = (2, 2, 1)$. Encontre dois vetores u_1 e u_2 unitários e ortogonais que gerem o mesmo espaço S.