EXERCÍCIOS ÁLGEBRA LINEAR
AUTO VALORES E AUTO VETORES
LISTA 8

1) Para cada item abaixo represente graficamente $vecu$, $vecTu$, diga se $vecu$ é um autovetor de T e em caso positivo diga qual seu autovalor associado.

a) $T(x, y) = (4x + 4y, 4x + 4y)$;

b) $T(x, y, z) = (4x + 4y + 2z, 4x + 4y, 4x + 2z)$;

c) $T(x, y) = (4x^2 + 8xy + 4y^2, 4x + 4y)$;

2) Considere o operador linear $T(x, y, z) = (x+z, y+z, x+y+2z)$. Usando a teoria de diagonalização, encontre as pré-imagens dos vetores $u = (1, 1, 1)$,$v = (-1, 0, 2)$ e $w = (1, 2, 1)$.

3) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (7x - 4y, -4x + y)$. Determine uma base β do $\mathbb{R}^2$ tal que T_β^β seja diagonal.

4) Para os operadores abaixo determine autovalores, autovetores e auto espaços associados.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T(x, y) = (2y, x)$;

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$;

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$;

d) $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$ e $A \to A^t$;

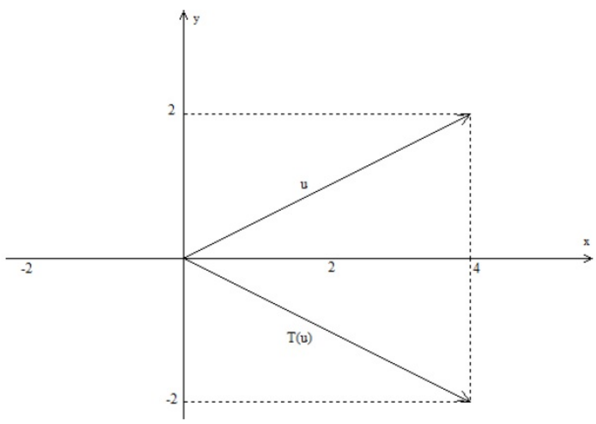
5) Encontre os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6) Para a transformação abaixo determine autovalores e auto vetores associados.



7) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $u_1 = (3, 1)$ e $u_2 = (-2, 1)$ respectivamente.

8) Que vetores não nulos do plano, quando cisalhados por $C(x, y) = (y - 3x, y)$ e em seguida girado de 45^o (no sentido anti-horário), ficam ampliados/reduzidos (na mesma direção)? De quanto?

9) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear que dobra o comprimento do vetor $u_1 = (1, -3)$ e triplica e muda o sentido do vetor $u_2 = (3, -1)$

a) Determine $T(x, y)$;

b) Calcule $T(0, 2)$;

c) Qual a matriz do operador T na base $\beta = \{(2, 1), (1, 2)\}$;

10) Seja $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$ um operador tal que $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ são auto vetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, e $\lambda_4 = 0$ respectivamente. Determine $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

11) Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é a projeção sobre a reta $y = \frac{x}{2}$, determine seus autovalores e seus autovetores associados.

12) Sejam P_1 o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a 1 e $D : P_1 \to P_1$ o operador tal que $D(p) = xp' + p'$ onde p' é a derivada de p. Determine os autovalores e autovetores de D.

13) Sejam A uma matriz quadrada $3X3$. Responda:

a) As matrizes A e A^t possuem mesmo determinante?

b) As matrizes A e A^t possuem mesmos autovalores e mesmos autovetores?

c) O que podemos afirmar se a matriz A for quadrada mas de ordem qualquer?

14) Sejam P_2 o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2 e $D : P_2 \to P_2$ o operador derivação. Determine os autovalores e autovetores de D.

15) Discuta a afirmação: Se λ não é um auto valor de A, então o sistema $(A - \lambda I)u = o$ tem apenas a solução trivial.

16) Sejam A e B duas matrizes nXn. Dizemos que uma matriz B é semelhante a matriz A quando existe uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Mostre que Se A e B são semelhantes, então A e B possuem o mesmo polinômio característico e portanto, mesmos autovalores e autovetores.

17) Considere as transformações abaixo. Se possível encontre uma matriz P que diagonaliza a matriz A da transformação e calcule $P^{-1}AP$.

a) $T : P_1 \to P_1$ tal que $T(a + bx) = (4a + 2b) + (a + 3b)x$;

b) $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(p(x)) = p(x + 1)$.

18) Verifique se a matriz A é diagonalizável e em caso positivo encontre sua matriz diagonal e sua matriz de autovetores.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

19) Encontre a solução geral do sistema: $\begin{cases} x_1' = -7x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -10x_1 + 8x_2 \end{cases}$