CEFET-RJ
Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Exercícios Álgebra Linear
Transformações Lineares
Lista 6

1) Para a aplicação $T(x,y) = (2x+y, x-y)$ faça o seguinte: Construa dois planos coordenados. No primeiro marque os vetores: $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (2,-1)$,$u_3 = (1,2)$, $u_4 = u_1 + u_2$, e $u_5 = u_2 - u_3$. No segundo marque os vetores $T(u_1)$, $T(u_2)$, $T(u_3)$, $T(u_5)$, $T(u_1)+T(u_2)$, e $T(u_2)-T(u_3)$. Com base nas representações feitas, você acha que esta transformação é linear? Finalmente, prove que se trata de uma transformação linear.

2) Usando escalonamento, mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ é inversível e determine sua inversa.

3) Para as aplicações a seguir, diga quais das propriedades de linearidade elas satisfazem e quais não. Conclua quais são transformações lineares.

a) $T(x,y) = (x-y, 2x+y)$;

b) $T(x,y,z) = (x+2y+z, x+y)$;

c) $T(x,y,z,w) = (x,y)$;

d) $T(x,y) = (e^{x+y}, x+y)$;

e) $T(x,y) = (sen(x), sen(y))$;

f) $T(x,y) = (ln(x), ln(y))$;

4) Obtenha a regra geral da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabendo que $T(1,0,0) = (1,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (1,-1)$. Após encontrar a regra, ache o vetor do $\mathbb{R}^3$ que é levado no vetor $u = (1,2)$.

5) Obtenha a regra geral da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabendo que $T(1,0,0) = (1,0)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,1,1) = (4,7)$.

6) Crie uma parametrização para um círculo de raio $r = 1$, de $[0, 2\pi]$ no $\mathbb{R}^2$ e depois uma transformação linear que encolha o circulo para um raio de $r = \frac{1}{2}$ e que o faça girar um ângulo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

7) Crie uma transformação linear que transforme o retângulo de vértices $p_1(1,1)$, $p_1(1,3)$, $p_1(4,1)$, $p_1(4,3)$ no retângulo de vértices $p_1(-1,-1)$, $p_1(-1,-4)$, $p_1(-3,-1)$, $p_1(-3,-4)$.

8) Obtenha a matriz associada a cada uma das transformações abaixo considerando a base canônica.

a) $T(x, y) = (2x - \frac{1}{3}y, x + y)$;

b) $T(x, y, z) = (-x + 2y + 2z, 4x - y)$;

c) $T(x, y, z, w) = (x, y, y, x)$;

d) $T(x, y, z, w, r) = (x + y, x + y, r + w, r + w)$;

e) $T(x, y) = (0, 0, 0)$;

f) $T(x, y, z, w, r) = (r, w, z, y, x)$;

g) $T(x, y, z, w, r) = (x, y, z, w, r)$.

9) Diga quais das transformações abaixo são injetoras.

a) $T(x, y, z) = (x + y - z, y + z, x + y - z)$;

b) $T(x, y, z) = (x - y + z, x + y, 2y - z)$;

c) $T(x, y, z, w) = (x + 2y, y - z + w, x - 2y + z, x - 3w)$;

d) $T(x, y, z, w, r) = (x + y, x + y, r + w, r + w)$;

e) $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 5x + 3y)$;

f) $T(x, y, z, w, r) = (y, -w, -x, y + x)$;

g) $T(x, y, z, w, r) = (x, y, z, w, r)$.

10) Para os exercícios (8) e (9), determine o espaço imagem e espaço núcleo das transformações lineares e verifique que vale o Teorema do Núcleo e da Imagem.