EXERCÍCIOS ÁLGEBRA LINEAR
ESPAÇOS E SUBESPAÇOS VETORIAIS
LISTA 2

1) Verifique quais dos conjuntos dados abaixo com as respectivas operações são ou não **espaços vetoriais**.

- a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x - 2y = 0\}$ com operações usuais do $\mathbb{R}^2$;
- b) E é o conjunto das matrizes da forma: $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ onde $a, b \in \mathbb{R}^2$ operações usuais do $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$;
- c) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = f(-x)\}$ operações usuais de funções;
- d) $E = \mathbb{R}^2$ com operações $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, x_1 - y_1)$ e $\alpha(x, y) = (3\alpha x, -\alpha x)$;
- e) $E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x = y, z = w^2\}$ operações usuais do $\mathbb{R}^4$;
- f) $E = \mathbb{R}^2$ com $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ e $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$;

2) Verifique quais dos conjuntos dados abaixo são ou não **subespaços vetoriais**.

- a) O conjunto
$$S = \{p(x) \in \mathbb{P}_n^*(x) \subset \mathbb{P}_n(x); p(X) = 0\};$$
- b) O conjunto
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\};$$
- c) O conjunto
$$S = \{\in C^2(\mathbb{R}); f'' - f = 0\}$$
(conjunto das soluções desta EDO de segunda ordem);
- d) O conjunto
$$S = \{A \in \mathbb{M}(n); A = A^t\}$$
(matrizes quadradas simétricas);
- e) S é o conjunto das matrizes da forma: $\begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \end{bmatrix}$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}^2$, subconjunto de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$;
- f) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x = y, z = w\}$;

3) Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta, isto é, provando se for verdadeira ou dando um contra exemplo se for falsa.

a) Se S_1 e S_2 são subespaços de um espaço vetorial E então $S_1 \cup S_2$ é um subespaço vetorial de E.

b) Sejam S_1 e S_2 subespaço de um espaço vetorial E. Então $S_1 \cup S_2$ é um subespaço de E se, e somente se,$S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$.

4) Considere um círculo de raio 1 no plano. Tome um ponto p sobre este círculo e seu vetor u associado. Ache a reta tangente ao círculo neste ponto. Prove que a reta tangente e o vetor u são ortogonais.

5) Considerando o produto interno definido em $C([0, 2\pi])$,
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$
deduza qual o ângulo entre as funções: $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = sen(x)$.

6) Considere o espaço vetorial das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Defina a aplicação:

$$<,>: \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

pondo

$$< A, B >= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$$

onde $A = [a_{i,j}]$ e $B = [b_{i,j}]$ Prove que $<,>$ é um produto interno.

7) Com relação ao produto interno definido no item anterior, calcule o produto interno entre: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Qual a conclusão sobre estas matrizes?

8) Prove que para $u, v \in E$ espaço vetorial com produto interno, vale
$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 4 < u, v >$;

9) Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual que n e coeficientes reais $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Defina a aplicação:

$$<,>: \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

pondo

$$< p, q >= \int_0^\infty e^{-x}p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

onde p e q são polinômios em $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Prove que $<,>$ é um produto interno.

10) Calcule a distância entre os pontos abaixo considerando o respectivo espaço vetorial com o produto interno canônico.

a) $u = (1, 1, 3, 2), v = (2, 2, 1, 0)$ em $\mathbb{R}^4$;

b) $u = sen(x), v = cos(x)$ em $C([0, 2\pi])$;

c) $u = (2, 2, 1), v = (-1, 1, 0)$ em $\mathbb{R}^3$;

d) $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

e) $u = (x + 1)^2, v = x^2 - 2$ em $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ (considere o produto interno dado no exercício 9);