CEFET-RJ Nova Iguaçu

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
UNIDADE DE NOVA IGUAÇU
Ensino de Graduação
MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS ÁLGEBRA LINEAR
ESTRUTURAS ALGÉBRICAS
LISTA 1

1) Diga quais dos conjuntos abaixo, munidos da operação indicada, são GRUPOS ABELIANOS.

- a) $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; onde $+$ é a soma usual.
- b) $(\mathbb{N}, .)$; $(\mathbb{Z}, .)$; $(\mathbb{Q}, .)$; $(\mathbb{R}, .)$; onde $.$ é a multiplicação usual.
- c) O conjunto das matrizes 2×2 com entradas reais e soma usual de matrizes;
- d) O conjunto das matrizes 2×2 com entradas reais e produto usual de matrizes;
- e) O conjunto dos polinômios de grau exatamente 2 com coeficientes reais e soma usual de polinômios;
- f) O conjunto dos polinômios de grau exatamente 2 com coeficientes reais e multiplicação usual de polinômios;
- g) O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a composição de funções.

2) Diga quais dos conjuntos abaixo, munidos das operações indicadas, são ANÉIS, DOMÍNIOS OU CORPOS.

- a) $(\mathbb{N}, +, .)$; $(\mathbb{Z}, +, .)$; $(\mathbb{Q}, +, .)$; $(\mathbb{R}, +, .)$; onde $+$ é a soma usual e $.$ é a multiplicação usual.
- b) O conjunto das matrizes 2×2 com entradas reais, soma e produto usuais de matrizes;
- e) O conjunto dos polinômios de grau exatamente 2 com coeficientes reais, soma e produto usual de polinômios;
- g) O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a as operações:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

3) Considere o conjunto $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$, no qual definiremos a operação **soma módulo 5** da forma:

Para $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a +_5 b = r$$

onde r é o resto da divisão de $a + b$ por 5.

(**Exemplo**: $\overline{2} + \overline{4} = \overline{1}$);

a) Verifique que a operação $+_5$ é fechada;

b) Construa uma tabela para a operação $+_5$ e o conjunto $\mathbb{Z}_5$;

c) Usando a tabela diga se $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ é um grupo abeliano.

4) Considere agora o conjunto $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$, munido com a operação soma definida em (3) e uma nova operação multiplicação módulo 5 definida da forma:

Para $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \times_5 b = r$$

onde r é o resto da divisão de $a \times b$ por 5.

(**Exemplo**: $\overline{2} \times \overline{4} = \overline{3}$);

a) Verifique que a operação $\times_5$ é fechada;

b) Construa uma tabela para a operação $\times_5$ e o conjunto $\mathbb{Z}_5$;

c) Usando a tabela diga se $(\mathbb{Z}_5, \times_5)$ é um grupo abeliano.

d) Verifique que $(\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5)$ é um corpo.

5) Repita todo o processo feito em (3) e (4) para $\mathbb{Z}_6$.

6) Para as operações binárias abaixo verifique se realmente são fechadas e que propriedades de grupos abelianos satisfazem.

a) $x * y = \frac{x+y}{2}$ com $x, y \in \mathbb{Q}$;

b) $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$ com $x, y \in \mathbb{R}_+$;

c) $x * y = 2xy$ com $x, y \in \mathbb{R}$;

d) $x * y = x + y - 2xy$ com $x, y \in \mathbb{R}$;

e) $x * y = x^2 - y^2$ com $x, y \in \mathbb{R}$;

7) Resolva em $\mathbb{R}$ as equações ou prove as igualdades identificando todas as propriedades utilizadas:

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

b) $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$;

c) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;

d) $x^2 - 3x + 5 = 3$;

e) $x^3 + 3x^2 - x = 3$;

f) $2x^2 + x + 2 = 3$;