CEFET-RJ
Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Álgebra Linear – EPRO – Prova 3

Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: ______________________________ **Nota**

Duração da prova: 2 horas. Data: 26/06/2015

O aluno deverá desenvolverAPENAS DEZ pontos da prova, isto é, a soma de todas as questões resolvidas NÃO PODE ultrapassar dez pontos.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada.

Nas questões de 01 a 04, o aluno deve, dada a pergunta, escolher qual das três respostas é a mais coerente como resposta e após feito isso, escolher dentre as duas justificativas, qual é a mais coerente.
MARQUE NESTA FOLHA

1) (1,0) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e A sua matriz associada. Sendo T a reflexão en torno do eixo y é correto afirmar que:

a) Não existe $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = u$ pois:

- (i) A matriz A não é diagonalizável;
- (ii) A matriz A é diagonalizável porém seus auvalores são iguais e diferentes de 1.

b) Existe $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = u$ e:

- (i) A matriz A já é diagonal com autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$;
- (ii) A matriz A possui um auto valor com multiplicidade 2.

c) A matriz A deixa invariante as retas passando pela origem cujos vetores diretores são: $u_1 = (1, 1)$ e $u_2 = (-1, 1)$ pois:

- (i) Cada autoespaço associado a cada um dos vetores u_1, u_2 tem dimensão 1;
- (ii) O espaço gerado pela soma direta de u_1, u_2 é uma reta.

2) (1,0) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que gira um vetor em um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário e seja A sua matriz associada. É correto afirmar:

a) $A^6 = I$ e:

- (i) $det(A^6 - \lambda I) = det(A - \lambda I)$;
- (ii) $det(A^6) = 1$.

b) A matriz A possui apenas um autovetor pois:

- (i) A possui apenas um ponto invariante por T;
- (ii) A possui apenas uma reta invariante por T.

c) $A^3(u) = (-u)$ e:

- (i) $(A^3 - I)(u) = \vec{0}$;
- (ii) $A = A^t$.

3) (1,0) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear e A sua matriz associada com 4 autovalores não nulos e distintos. É correto afirmar que:

a) A dimensão da soma direta dos autoespaços gerados pelos autovetores de A deve ser 1, 2 ou 3 pois:

- (i) Cada autovalor tem multiplicidade 1;
- (ii) A soma direta dos autoespaços gerados deve estar contida no domínio de T.

b) A dimensão da soma direta dos autoespaços gerados pelos autovetores de A deve ser 4 pois:

- (i) Os 4 autovetores associados aos autovalores distintos constituem um conjunto LI;
- (ii) A matriz A é uma matriz diagonal com a diagonal composta por seus 4 autovalores;

c) Se λ_1 e λ_2 são autovalores de A então obrigatoriamente temos $T[(\lambda_1 + \lambda_2)u] = \vec{0}$ pois:

- (i) Neste caso $\lambda_1 = -\lambda_2$;
- (ii) Como T é uma transformação linear, $T[(\lambda_1 + \lambda_2)u] = \lambda_1 T(u) + \lambda_2 T(u)$;

4) (1,0) Seja T uma transformação linear, A sua matriz associada e suponha que existam matrizes P e D, D diagonal com todos os valores da diagonal distintos e não nulos, tais que $A(u) = PDP^{-1}(u)$. É correto dizer que:

a) A matriz P possui pelo menos uma linha combinação linear das outras pois:

- (i) $det(P) = 0$;
- (ii) $det(P^{-1}) = 0$;

b) $A(u) = PDP^{-1}(u) = P^{-1}DP(u)$

- (i) A ordem da multiplicação no espação das matrizes não altera o resultado;
- (ii) Nesta composição P e P^{-1} se anulam porque são inversas;

c) Os determinantes de A e D são iguais pois:

- (i) $det(A) = det(PDP^{-1}) = det(P)det(D)det(P^{-1}) = det(D)$;
- (ii) Neste caso sempre temos $det(P) = det(D) = det(A)$.

5) (2,0) Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (5x - 6y, 3x - 4y)$. Para T determine: Seus autovalores, seus autovetores associados e seus autoespaços.

6) (2,0) Considere a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (-8x + 7y + 4z, -10x + 9y + 4z, -7x + 5y + 5z)$. Se A é a matriz associada a transformação T, encontre matrizes P e D, D diagonal tais que $A(u) = PDP^{-1}(u)$.

7) (2,0) Sabe-se que a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$
leva o vetor $u_1(1, 1, 0, 1)$ no vetor $v_1(2, 2, 0, 2)$;
leva o vetor $u_2(-4, 4, -4, 4)$ no vetor $v_2(1, -1, 1, -1)$;
leva o vetor $u_3(0, -2, 0, 4)$ no vetor $v_3(0, 1, 0, -2)$;
leva o vetor $u_4(6, 0, 0, 12)$ no vetor $v_4(3, 0, 0, 6)$;
Se A é a matriz associada à transformação T, determine $det(A)$.

8) (2,0) Use autovalores para encontre uma equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea a coeficientes constantes tal que quando fizermos $y_2 = y_1'$, pelo método de redução de ordem, poderemos encontrar sua solução geral resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 8y_1 + y_2 \end{cases}$$

9) (2,0) Abaixo é dado o vetor w escrito na base $\beta = \{u_1 = (2,0), u_2 = (1,2)\}$ (imagem (a)), pelas coordenadas $w_\beta = (\frac{1}{2}, 1)$. Na segunda imagem é dado o mesmo vetor agora escrito na base $\tau = \{v_1 = (2,1), v_2 = (1,1)\}$ (imagem (b)), pelas coordenadas $w = (0,2)$. Determine a matriz de transformação que leva as coordenadas de w da base β nas coordenadas de w na base τ.