CEFET-RJ Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Álgebra Linear – EPRO – Prova 3

Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: ____________________ **Nota**

Duração da prova: 2 horas. Data: 01/12/2016

O aluno deverá desenvolver APENAS DEZ pontos da prova, isto é, a soma de todas as questões resolvidas NÃO PODE ultrapassar dez pontos.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada.

Nas questões de 01 a 04, o aluno deve, dada a pergunta, escolher qual das três respostas é a mais coerente como resposta e após feito isso, escolher dentre as duas justificativas, qual é a mais coerente.

MARQUE NESTA FOLHA

1) (1,0) Considere o operador linear $T : R^n \to R^n$. É correto afirmar que:

a) Se A é a matriz associada a T e $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$ então $A = A^t$ e:

- (i) O determinante de A é não nulo;
- (ii) O teorema espectral garante que A é diagonalizável.

b) O operador T é um isomorfismo pois:

- (i) A matriz A possui n auto-valores distintos;
- (ii) A imagem de T é igual ao seu contra-domínio.

c) $AA^t = I$:

- (i) O operador é auto-adjuto;
- (ii) $A = A^{-1}$.

2) (1,0) Sejam $M = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ os n auto valores do operador $T : R^n \to R^n$ e A é a matriz associada a T.

a) O determinante da matriz A é zero pois:

- (i) Algum dos α_i deve ser zero;
- (ii) O determinante de A é o produto dos elementos de sua diagonal.

b) A imagem do operador T é todo o R^n pois:

- (i) Os $\alpha_i^{\prime}s$ constituem uma base para o espaço imagem;
- (ii) n auto valores estão associados a n autovetores que geram uma base para o espaço imagem.

c) Se $\alpha_i \neq \alpha_j$ para todo $i, j = 1, ..., n$ então o traço de A é não nulo pois:

- (i) $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii})$;
- (ii) $\alpha_i \neq 0$ para todo i.

3) (1,0) Considere o subconjunto $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ constituído por n autovetores, (distintos), associado aos $M = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ auto valores de um operador $T : R^n \to R^n$.

a) O operador linear T não é diagonalizável pois:

- (i) Podemos ter $k < n$;
- (ii) Podemos ter $k > n$.

b) O conjunto B constitui uma base para o R^n pois:

- (i) O conjunto dos Autovalores, M, constitui um conjunto LI.
- (ii) A matriz cujas colunas são formadas pelos vetores $u_i's$ constitui um isomorfismo;

c) $T(u_i) = T(u_j), \forall i, j = 1, 2, ..., n$ pois:

- (i) Os $u_i's$ são autovetores;
- (ii) O operador T é auto-adjunto.

4) (1,0) Considere o operador $T : R^2 \to R^2$ que faz girar 180º qualquer vetor do R^2. É correto afirmar que:

a) O matriz do operador T é diagonalizável:

- (i) Sua diagonal será formada pelos autovalores 1 e -1;
- (ii) Sua diagonal será formada pelos autovalores -1 e -1;

b) Sua multiplicidade geométrica será menor que sua multiplicidade algébrica pois:

- (i) Seu polinômio característico tem grau 1;
- (ii) Seu polinômio característico tem grau 2;

c) O matriz do operador T não é diagonalizável pois:

- (i) Todos os vetores do R^2 são deslocados;
- (ii) T não é um operador linear.

5) (2,0) Diagonalize a matriz do operador $T(x, y, z) = (x + 2y + z, x - y - z, x + z)$.

6) (2,0) Sabendo que o operador $T(x, y, z, w) = (2x + z + w, 2y + z + w, x + y + 3w, z - 2w)$, quando escrito na base $\beta = \{(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}, 2, 1), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1), (6, 6, 5, 1)\}$ tem como associada uma matriz diagonal D, usando autovalores e autovetores calcule seu determinante.

7) (2,0) Um operador é auto adjuto quando $< T(u), v >=< u, T(v) >$, isto é, $T = T^*$. Mostre que se $T : E \to E$ e $P : E \to E$ são operadores auto adjuntos então o operador $T - P$ também é auto adjunto.

8) (2,0) Classifique a cônica $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$.

9) (2,0) Dado o operador $T : R^3 \to R^3$, definido na base canônica por:

$$T(x, y, z) = (x - y + z, -x + 3y - z, x - y + z)$$

,com matriz associada A. Encontre uma base β na qual sua matriz associada seja uma matriz diagonal D. Encontre uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D$.