



ÁLGEBRA LINEAR – EPRO – PROVA 1

Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: _____

Duração da prova: 2 horas. Data: 06/04/2017

O aluno deverá desenvolver APENAS DEZ pontos da prova, isto é, a soma de todas as questões resolvidas **NÃO PODE** ultrapassar dez pontos.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada.

Nota

--

Nas questões de 01 a 04, o aluno deve, dada a pergunta, escolher qual das três respostas é a mais coerente como resposta e após feito isso, escolher dentre as duas justificativas, qual é a mais coerente.

MARQUE NESTA FOLHA

- 1) (1,0) Considere os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{k} contidos no \mathbb{R}^2 . É correto afirmar que:
- a) Os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{k} geram o \mathbb{R}^2 pois:
- (i) Para gerarmos o \mathbb{R}^2 são necessários apenas 2 vetores;
 - (ii) Quatro vetores geram o \mathbb{R}^4 e o \mathbb{R}^2 está contido no \mathbb{R}^4 .
- b) Se \vec{u} e \vec{v} forem uma base para o \mathbb{R}^2 e \vec{w} e \vec{k} também forem uma base para o \mathbb{R}^2 então $\vec{u} = \vec{w}$ e $\vec{v} = \vec{k}$, pois:
- (i) A base para um espaço vetorial é única;
 - (ii) Tanto \vec{u} e \vec{v} como \vec{w} e \vec{k} geram o \mathbb{R}^2 logo são iguais;
- c) Se \vec{u} e \vec{v} forem uma base para o \mathbb{R}^2 e \vec{w} e \vec{k} também forem uma base para o \mathbb{R}^2 , e um vetor \vec{h} que tiver coordenadas (α, β) na base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ também tiver coordenadas (α, β) na base $\{\vec{w}, \vec{k}\}$ então $\vec{u} = \vec{w}$ e $\vec{v} = \vec{k}$, pois:
- (i) A base para um espaço vetorial é única;
 - (ii) Cada vetor se escreve de maneira única em uma base.
- 2) (1,0) Considere o espaço vetorial E e os vetores \vec{u} e \vec{v} , é correto afirmar que:
- a) Se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ então $\vec{u} \times \vec{v} = 0$;
- (i) Pois a área do paralelogramo definido por \vec{u} e \vec{v} é nula;
 - (ii) O produto vetorial de dois vetores resulta em um vetor perpendicular aos dois;
- b) Se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ pois:
- (i) $\langle u, v \rangle = |u||v|\cos(\theta)$ e neste caso $\theta = 0$;
 - (ii) O produto interno de dois vetores perpendiculares é zero.
- c) Se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ então \vec{u} e \vec{v} geram um subespaço bidimensional pois:
- (i) Os vetores \vec{u} e \vec{v} são LI's;
 - (ii) Os vetores \vec{u} e \vec{v} são LD's.

3) (1,0) Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores não nulos no espaço vetorial \mathbb{R}^n . É correto afirmar que:

a) O vetor $proj_{\vec{v}}(\vec{u})$ está na direção de \vec{v} :

- (i) A projeção ortogonal sempre resulta em um vetor perpendicular ao projetado;
- (ii) A projeção ortogonal sempre resulta em um vetor perpendicular ao vetor sobre o qual se está projetando;

b) O vetor $\vec{w} = \vec{u} - proj_{\vec{v}}(\vec{u}) \neq \vec{0}$ é perpendicular a \vec{v} :

- (i) A afirmação é verdadeira sempre que \vec{u} e \vec{v} não forem paralelos;
- (ii) A afirmação é sempre verdadeira;

c) O subconjunto $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, proj_{\vec{v}}(\vec{u})\}$ é Li pois:

- (i) A projeção resulta sempre em um vetor perpendicular aos outros dois;
- (ii) A projeção de vetores perpendiculares é sempre nula;

4) (1,0) Considere no \mathbb{R}^3 os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , e \vec{h} . É correto afirmar que:

a) A combinação linear $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} + \alpha_4\vec{h} = \vec{0}$ tem solução única:

- (i) A solução $(0, 0, 0, 0)$ é solução da equação; • (ii) Quatro vetores no \mathbb{R}^3 são sempre LD's;

b) Se o determinante da matriz associada ao sistema $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} = \vec{0}$ tiver determinante nulo então a solução do sistema é única.

- (i) O sistema é possível e determinado; • (ii) O sistema é possível e indeterminado;

c) Se a combinação linear $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} = \vec{0}$ tiver solução única então o determinante da matriz associada ao sistema $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} = \vec{0}$ é diferente de zero:

- (i) Neste caso os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI's;
- (ii) Dado um conjunto de quatro vetores no \mathbb{R}^3 , ao se retirar um vetor obtemos uma base.

5) (2,0) Dadas três retas.
$$\begin{cases} r(t) = t(1, -1, 1) + (1, 1, 4) \\ s(t) = t(1, 1, 3) + (0, 2, 3) \\ h(t) = t(1, 0, 2) + (-1, 1, 0) \end{cases}$$

Verifique se estas retas se interceptam e caso se interceptem, e for possível, determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos de intersecção.

6) (2,0) Dê uma base para o espaço gerado pelos vetores: $u_1 = (1, 0, 2, 1)$, $u_2 = (1, 3, -2, 0)$, $u_3 = (2, 3, 0, 1)$, $u_4 = (3, 6, -2, 1)$.

7) (2,0) Mostre que se os vetores \vec{u} e \vec{v} tiverem mesmo comprimento, então $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são perpendiculares.

8) (2,0) Dê condições necessárias e suficientes sobre \vec{u} e \vec{v} para que seja válido a relação

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

9) (2,0) Sabe-se que o conjunto de vetores $\vec{u} = (a, b, c)$ para os quais o sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = a \\ 3x + y + 5z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

tem solução consiste em um subespaço vetorial. Dê uma base para este subespaço.