CEFET-RJ Nova Iguaçu

Centro Federal de Educação Tecnológica
Unidade de Nova Iguaçu
Ensino de Graduação
Matemática

Álgebra Linear – EMEC – Prova 1

Prof. *Rildo Soares*

Nome completo: ______________________________ **Nota**

Duração da prova: 2 horas. Data: 06/04/2017

O aluno deverá desenvolver APENAS DEZ pontos da prova, isto é, a soma de todas as questões resolvidas NÃO PODE ultrapassar dez pontos.

ATENÇÃO: Todos os raciocínios, contas, resultados matemáticos usados na resolução da prova, devem aparecer na prova! Sob pena da questão não ser considerada.

Nas questões de 01 a 04, o aluno deve, dada a pergunta, escolher qual das três respostas é a mais coerente como resposta e após feito isso, escolher dentre as duas justificativas, qual é a mais coerente. MARQUE NESTA FOLHA

1) (1,0) Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{k}$ contidos no $\mathbb{R}^2$. É correto afirmar que:

a) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{k}$ geram o $\mathbb{R}^2$ pois:

- (i) Para gerarmos o $\mathbb{R}^2$ são necessários apenas 2 vetores;
- (ii) Quatro vetores geram o $\mathbb{R}^4$ e o $\mathbb{R}^2$ está contido no $\mathbb{R}^4$.

b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem uma base para o $\mathbb{R}^2$ e $\vec{w}$ e $\vec{k}$ também forem uma base para o $\mathbb{R}^2$ então $\vec{u} = \vec{w}$ e $\vec{v} = \vec{k}$, pois:

- (i) A base para um espaço vetorial é única;
- (ii) Tanto $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como $\vec{w}$ e $\vec{k}$ geram o $\mathbb{R}^2$ logo são iguais;

c) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem uma base para o $\mathbb{R}^2$ e $\vec{w}$ e $\vec{k}$ também forem uma base para o $\mathbb{R}^2$, e um vetor $\vec{h}$ que tiver coordenadas (α, β) na base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ também tiver coordenadas (α, β) na base $\{\vec{w}, \vec{k}\}$ então $\vec{u} = \vec{w}$ e $\vec{v} = \vec{k}$, pois:

- (i) A base para um espaço vetorial é única;
- (ii) Cada vetor se escreve de maneira única em uma base.

2) (1,0) Considere o espaço vetorial E e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é correto afirmar que:

a) Se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ então $\vec{u} X \vec{v} = 0$;

- (i) Pois a área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é nula;
- (ii) O produto vetorial de dois vetores resulta em um vetor perpendicular aos dois;

b) Se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ então $< \vec{u}, \vec{v} >= 0$ pois:

- (i) $< u, v >= |u||v|cos(\theta)$ e neste caso $\theta = 0$;
- (ii) O produto interno de dois vetores perpendiculares é zero.

c) Se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram um subespaço bidimensional pois:

- (i) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI's;
- (ii) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD's.

3) (1,0) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. É correto afirmar que:

a) O vetor $proj_{\vec{v}}(\vec{u})$ está na direção de $\vec{v}$:

- (i) A projeção ortogonal sempre resulta em um vetor perpendicular ao projetado;
- (ii) A projeção ortogonal sempre resulta em um vetor perpendicular ao vetor sobre o qual se está projetando;

b) O vetor $\vec{w} = \vec{u} - proj_{\vec{v}}(\vec{u}) \neq \vec{0}$ é perpendicular a $\vec{v}$:

- (i) A afirmação é verdadeira sempre que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não forem paralelos;
- (ii) A afirmação é sempre verdadeira;

c) O subconjunto $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, proj_{\vec{v}}(\vec{u})\}$ é Li pois:

- (i) A projeção resulta sempre em um vetor perpendicular aos outros dois;
- (ii) A projeção de vetores perpendiculares é sempre nula;

4) (1,0) Considere no $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, e $\vec{h}$. É correto afirmar que:

a) A combinação linear $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} + \alpha_4\vec{h} = \vec{0}$ tem solução única:

- (i) A solução $(0, 0, 0, 0)$ é solução da equação; • (ii) Quatro vetores no $\mathbb{R}^3$ são sempre LD's;

b) Se o determinante da matriz associada ao sistema $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} = 0$ tiver determinante nulo então a solução do sistema é única.

- (i) O sistema é possível e determinado; • (ii) O sistema é possível e indeterminado;

c) Se a combinação linear $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} = \vec{0}$ tiver solução única então o determinante da matriz associada ao sistema $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} = 0$ é diferente de zero:

- (i) Neste caso os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI's;
- (ii) Dado um conjunto de quatro vetores no $\mathbb{R}^3$, ao se retirar um vetor obtemos uma base.

5) (2,0) Dadas três retas. $\begin{cases} r(t) = t(1, -1, 1) + (1, 1, 4) \\ s(t) = t(1, 1, 3) + (0, 2, 3) \\ h(t) = t(1, 0, 2) + (-1, 1, 0) \end{cases}$

Verifique se estas retas se interceptam e caso se interceptem, determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos de intersecção

6) (2,0) Dê uma base para o espaço gerado pelos vetores: $u_1 = (1, 0, 2, 1)$, $u_2 = (1, 3, -2, 0)$, $u_3 = (2, 3, 0, 1)$, $u_4 = (3, 6, -2, 1)$.

7) (2,0) Sabendo que o vetor $\vec{u}$, quando escrito na base $\vec{v_1}(1, -1, 0), \vec{v_2}(0, -1, 1), \vec{v_3}(1, 0, 1)$ tem coordenadas $\vec{u}(1, 1, 1)$, determine a norma do vetor $\vec{u}$ quando escrito na base canônica.

8) (2,0) Prove que para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale
$||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 4 < \vec{u}, \vec{v} >$

9) (2,0) Sabe-se que o conjunto solução de um sistema consiste em um subespaço vetorial. Determine o subespaço vetorial que resolve o sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$